

Analyse appliquée

Coefficients de Fourier

Exercice 1. Soit $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On suppose qu'elle est sommable, c'est-à-dire que $\int_{-\pi}^{\pi} |f|$ est convergente. (Remarque : si f est intégrable, alors elle est bien sûr sommable. Sinon, on voit l'intégrale comme une intégrale impropre et l'hypothèse signifie alors que cette intégrale impropre est convergente.) Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, les intégrales

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\xi x) dx \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(\xi x) dx$$

sont toutes absolument convergentes.

Exercice 2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^N \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{N}{2}x\right)}{\sin(x/2)}.$$

Suggestion. Calculer $\sum_{n=0}^N e^{inx}$ comme une somme géométrique et considérer les parties réelles ou imaginaires.

La série $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ est intéressante, car elle est conditionnellement convergente pour certaines valeurs de x (comme $x = \frac{\pi}{2}$), ce qui veut dire qu'elle ne peut pas être normalement convergente. Néanmoins, elle est uniformément convergente sur tous les compacts de $(0, 2\pi)$ (on dit alors qu'elle est *localement uniformément convergente*). La plupart des critères de convergence d'analyse 1 et 2 sont inefficaces. Le lemme d'Abel (exercice ci-bas) est une façon possible de montrer la convergence de la série. Le critère de Dirichlet, si vous le connaissez, s'appliquerait aussi. Une autre façon de montrer sa convergence est en utilisant des théorèmes de convergence des séries de Fourier, ce que vous aurez à faire dans le premier devoir.

Exercice 3. (Optionnel) (Analyse 1)

- a) (Somme par partie) Soit (a_n) et (b_n) deux suites et soit (s_n) la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 1} a_n$. Montrer que

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n.$$

- b) (Lemme d'Abel) Soit (b_n) une suite décroissante et positive. Soit (a_n) une suite telle qu'il existe M, m tels que

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M$$

pour tout n . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq M b_1.$$

Ensuite, montrer que pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on a

$$|a_k b_k + \cdots + a_n b_n| \leq (M - m) b_k.$$

Exercice 4. a) Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \tag{*}$$

converge sur $[0, 2\pi]$ en utilisant le lemme d'Abel et l'exercice 2.

- b) Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\pi}{N} n\right) = \frac{2}{\pi}.$$

- c) (Optionnel) Adapter la démarche du a) pour montrer que la convergence est uniforme sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$.
d) (Optionnel) Dédurre à partir du b) que la série ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$.