

Analyse appliquée

Fonctions sur le cercle et espaces vectoriels

Exercice 1. Montrer que les ensembles suivants sont en bijection.

$$\{f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{et } f(\pi) = f(-\pi) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{et } f \text{ est} \\ 2\pi\text{-périodique} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}\}$$

Solution. On pourrait des arguments de cardinal, mais ce n'est pas le but de la question. Il est plus instructif de donner une bijection. Notons les flèches comme suit :

$$\{f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}\} \xleftrightarrow{1} \left\{ \begin{array}{l} f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{et } f(\pi) = f(-\pi) \end{array} \right\} \xleftrightarrow{2} \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{et } f \text{ est} \\ 2\pi\text{-périodique} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{3} \{f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}\}$$

Pour 1, comme $x \mapsto e^{ix}$ est une bijection de $[-\pi, \pi)$ et que $e^{-i\pi} = e^{i\pi}$, une fonction $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ donne une fonction $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(x) = g(e^{ix})$. Cette relation est bien définie ssi $f(-\pi) = f(\pi)$, donc cela donne la bijection 1.

Pour 2, on peut prolonger une fonction $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ en une fonction $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est 2π -périodique par $\tilde{f}(x + 2n\pi) = f(x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi)$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. Cela est bien définie puisque $f(-\pi) = f(\pi)$. Inversement, si on restreint une fonction $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est 2π -périodique à l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on obtient une fonction $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(-\pi) = f(\pi)$.

Pour 3, si on restreint une fonction $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est 2π -périodique à l'intervalle $[-\pi, \pi)$, on obtient une fonction $f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$. Réciproquement, on peut prolonger une fonction $f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ par $\tilde{f}(x + 2n\pi) = f(x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi)$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. On obtient ainsi une fonction 2π -périodique.

Exercice 2. Déterminer si chacune des fonctions $f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ suivantes définit une fonction continue sur $\mathbb{T}$.

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = \pi^2 - x^2$

Solution. a) Oui, car f est continue sur $[-\pi, \pi)$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \pi = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x).$$

b) Non, car

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = -\pi \neq \pi = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x).$$

c) Oui, même calcul qu'au a).

Exercice 3. Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $u, v \in V$.

- a) (Identités de polarisation réelle) Montrer que si V est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, alors $2\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$ et $4\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2$.
- b) (Identité de polarisation hermitienne) Montrer que si V est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, alors $2\Re\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$ et $2\Im\langle u, v \rangle = \|u + iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$.
- c) (Théorème de Pythagore) Montrer que si u et v sont orthogonaux ($\langle u, v \rangle = 0$), alors $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Le montrer dans les cas où V est un $\mathbb{C}$ - ou $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Solution. a) On a

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

Il suffit de réarranger les termes pour obtenir la première identité.

Ensuite, on a

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

On obtient la seconde identité en réarrangeant les termes de cette équation et en combinant avec l'équation précédente.

b) Elle se fait de façon similaire au a). Je vous laisse écrire les détails.

Exercice 4. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $u, v \in V$ et $t \in \mathbb{R}$.

- a) On pose $p(t) = \langle u + tv, u + tv \rangle$. Montrer que p est un polynôme à coefficients réels de degré 2.
- b) Montrer que $p(t)$ est toujours positif ou nul.
- c) Montrer que $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$.
Indice. Calculer le discriminant de p . Que pouvez-vous dire, en tenant compte du b) ?
- d) Dédurre que si $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sont continues, alors

$$\int_a^b |fg| \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2}.$$

Solution. a) D'abord, on peut écrire

$$p(t) = \langle u + tv, u + tv \rangle = \langle u, u \rangle + t\langle u, v \rangle + t\langle v, u \rangle + t^2\langle v, v \rangle.$$

On voit que p est un polynôme de degré 2. Puisque $\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} = 2\Re(\langle u, v \rangle)$, il suit que les coefficients de p sont bien réels.

b) Par définition de p , on a $p(t) = \langle u + tv, u + tv \rangle = \|u + tv\|^2$, ce qui est bien un nombre réel positif.

c) Soit Δ le discriminant de p . Il y a deux possibilité : soit p possède un zéro double, auquel cas $\Delta = 0$, soit p ne possède aucun zéro, auquel cas $\Delta < 0$. Dans tous les cas, on doit avoir $\Delta \leq 0$.

On sait que $\Delta = b^2 - 4ac$, avec $a = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$, $b = 2\Re(\langle u, v \rangle)$ et $c = \langle u, u \rangle = \|u\|^2$. Ainsi, comme $b^2 - 4ac \leq 0$, on obtient $4\Re(\langle u, v \rangle)^2 \leq 4\|u\|^2\|v\|^2$ et donc

$$|\Re(\langle u, v \rangle)| \leq \|u\|\|v\|. \quad (*)$$

Ce n'est pas tout à fait la formule demandée. Pour obtenir la bonne formule, il y a plusieurs façons de procéder. En voici une.

D'abord, si $\langle u, v \rangle = 0$, alors la formule est vérifiée. Supposons maintenant que $\langle u, v \rangle \neq 0$. La formule $(*)$ est vraie pour tout vecteur de V . En particulier, elle est vraie si on remplace u par $u \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{|\langle u, v \rangle|}$. Remarquons que $\|u \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{|\langle u, v \rangle|}\| = \|u\|$ et que

$$\Re \left(\left\langle u \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{|\langle u, v \rangle|}, v \right\rangle \right) = \Re \left(\frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{|\langle u, v \rangle|} \langle u, v \rangle \right) = \Re \left(\frac{|\langle u, v \rangle|^2}{|\langle u, v \rangle|} \right) = \Re(|\langle u, v \rangle|) = |\langle u, v \rangle|.$$

Ainsi, en remplaçant dans $(*)$, on obtient la formule demandée.

d) On rappelle que le produit scalaire est $\langle f, g \rangle = \int_a^b f \bar{g}$. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Riemann avec $|f|$ et $|g|$:

$$\int_a^b |fg| = \langle |f|, |g| \rangle = |\langle |f|, |g| \rangle| \leq \| |f| \| \| |g| \| = \|f\|_2 \|g\|_2.$$

On peut écrire cela sous la forme $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

Optionnel. Analyse de Fourier sur les groupes abéliens compacts

Exercice 5. (Optionnel) Un *groupe topologique* est un groupe muni d'une topologie Hausdorff telle que l'opération de groupe et l'inversion sont continues. Soit $(G, *)$ un groupe topologique abélien. Un *caractère* est un homomorphisme continu de $(G, *) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$, où $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ est le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls.

Remarque. Dans le cas des groupes finis, on peut munir le groupe de la topologie discrète et donc les caractères sont tous les homomorphismes de $G \rightarrow \mathbb{C}^*$.

- Montrer que l'ensemble des caractères, muni du produit de fonctions, forme un groupe abélien.
- Montrer que si G est fini d'ordre n , alors un caractère φ est à valeurs dans $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

Exercice 6. (Optionnel) Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de la topologie quotient et soit $S = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ muni de la multiplication et de la topologie relative à $\mathbb{C}$. On tient

pour acquis que ce sont des groupes topologiques. Comme $S \subseteq \mathbb{C}$ est compact dans $\mathbb{C}$ (car fermé et borné), c'est un espace topologique compact.

- a) Montrer que $h: S \rightarrow \mathbb{T}$, défini par $h(e^{i\theta}) = \theta + 2\pi\mathbb{Z}$ est un isomorphisme de groupe continu.

Remarque. Par un théorème de topologie, une fonction bijective et continue définie sur un compact est un homéomorphisme. On pourrait aussi directement montrer que h^{-1} est continue. Dans tous les cas, il en résulte que $\mathbb{T}$ est compact.

- b) Montrer que si $(G, \cdot)$ est un groupe compact, alors un caractère de G est à valeurs dans S .
c) Montrer que, dans le cas du b), pour un caractère φ , on a $\varphi^{-1} = \overline{\varphi}$, où $\overline{\cdot}$ est la conjugaison complexe.

Exercice 7. (Optionnel) Un groupe topologique abélien $(G, +)$ agit sur lui-même naturellement par translation : pour $g \in G$, on peut définir $\tau_g: x \mapsto x + g$. On s'intéresse aux fonctions $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ qui se transforment naturellement par rapport à cette action.

- a) Montrer que si $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ est invariante par toutes les translations, c'est-à-dire $f \circ \tau_g = f$, alors f est constante.
b) Montrer que si f vérifie plutôt $f \circ \tau_g = \varphi(g)f$, pour une certaine fonction $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$, alors φ est un caractère, pourvu que f ne soit pas identiquement nulle.
c) Réciproquement, montrer que f est entièrement déterminé par sa valeur en 0 et par φ .
d)[†] Montrer que si φ est un caractère de $\mathbb{T}$, alors $\varphi(x) = e^{ikx}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.
e) Montrer que l'ensemble des caractères de $\mathbb{T}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

Solution. d) Il y a plus d'une façon de faire cet exercice. Je vous en présente une très jolie méthode que j'ai trouvée dans le livre S. Krantz, *A Panorama of Harmonic Analysis*.

Soit $0 < a < 2\pi$ tel que $\int_0^a \varphi \neq 0$. (Un tel a doit exister, sinon φ serait identiquement nulle. Je vous laisse vérifier.) On pose $b = \int_0^a \varphi$ la valeur de cette intégrale. On a

$$\begin{aligned} b\varphi(x) &= \varphi(x) \int_0^a \varphi(t) dt \\ &= \int_0^a \varphi(x+t) dt \\ &= \int_x^{a+x} \varphi(u) du. \end{aligned}$$

Ainsi, il suit que $\varphi(x) = \frac{1}{b} \int_x^{x+b} \varphi$, donc φ est continûment dérivable. À partir de là, c'est un exercice classique, mais on peut le terminer.

Puisque $\varphi(x+t) = \varphi(x)\varphi(t)$, on peut dériver par rapport à t : $\varphi'(x+t) = \varphi(x)\varphi'(t)$, et évaluer en $t = 0$: $\varphi'(x) = \varphi'(0)\varphi(x)$. C'est une EDO linéaire d'ordre 1. La théorie des EDO nous dit que la solution est de la forme $C \cdot$ exponentielle, mais on peut le montrer directement.

On pose $C = \varphi'(0)$ et $h(x) = \frac{\varphi(x)}{e^{Cx}} = \varphi(x)e^{-Cx}$. On a

$$h'(x) = \varphi'(x)e^{-Cx} - C\varphi(x)e^{-Cx} = \varphi'(0)\varphi(x)e^{Cx} - C\varphi(x)e^{-Cx} = 0.$$

Ainsi, h est une fonction constante. Comme $h(x) = h(0) = \varphi(0)$, on a $\varphi(x) = \varphi(0)e^{Cx}$.

Remarquons que $\varphi(0+0) = \varphi(0)\varphi(0) = \varphi(0)^2$, ainsi $\varphi(0)(1 - \varphi(0)) = 0$. Comme $\varphi(0) \neq 0$, on a $\varphi(0) = 1$.

Enfin, comme $\mathbb{T}$ est compact, il faut $|\varphi(x)| = 1$, donc C est imaginaire pure. De plus, comme φ est 2π -périodique, il faut que C soit de la forme ik , où $k \in \mathbb{Z}$.

e) L'isomorphisme est donné par $h(e^{ikx}) = k$. Que h est bijective est clair. Pour montrer que h est un homomorphisme, on a $h(e^{ikx}e^{imx}) = h(e^{i(k+m)x}) = k + m = h(e^{ikx}) + h(e^{imx})$. Un homomorphisme inversible est automatiquement un isomorphisme, donc h est un isomorphisme.

Remarque. Dans le cours, on s'intéressera à exprimer une fonction $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ comme une série $\sum c_n e^{inx}$, c'est-à-dire en terme des caractères de $\mathbb{T}$, et, plus tard, une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ comme une intégrale des caractères de $\mathbb{R}$. Le groupe des caractères d'un groupe abélien est le point de départ pour l'analyse de Fourier.

Si on regarde à la solution du 4d), on voit que la démarche fonctionne pour un caractère de $(\mathbb{R}, +)$, jusqu'aux contraintes de C . Comme $\mathbb{R}$ n'est pas compact et φ n'est pas 2π -périodique, C n'a pas de contrainte. Cependant, pour l'analyse de Fourier, on considère tout de même seulement les caractères à valeurs dans $\mathbb{T}$. Dans ce cas, le groupe des caractères de $\mathbb{R}$ est $\{\varphi(x) = e^{i\xi x} \mid \xi \in \mathbb{R}\}$, qui est isomorphe à $\mathbb{R}$ lui-même.

Il est naturel de se demander si les caractères à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ sont également utiles. Malheureusement, je n'ai pas d'information à ce sujet. Je pense qu'il y a des liens avec la transformation de Laplace, mais ce serait à confirmer par une source sûre.