

Fonctions sur le cercle et espaces vectoriels

$$\{f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{et } f(\pi) = f(-\pi) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{et } f \text{ est} \\ 2\pi\text{-périodique} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}\}$$

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = \pi^2 - x^2$

- (Identités de polarisation réelle) Montrer que si V est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, alors $2\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$ et $4\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2$.
- (Identité de polarisation hermitienne) Montrer que si V est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, alors $2\Re\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$ et $2\Im\langle u, v \rangle = \|u + iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$.
- (Théorème de Pythagore) Montrer que si u et v sont orthogonaux ($\langle u, v \rangle = 0$), alors $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Le montrer dans les cas où V est un $\mathbb{C}$ - ou $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- On pose $p(t) = \langle u + tv, u + tv \rangle$. Montrer que p est un polynôme à coefficients réels de degré 2.
- Montrer que $p(t)$ est toujours positif ou nul.
- Montrer que $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.
Indice. Calculer le discriminant p . Que pouvez-vous dire, en tenant compte du b) ?
- Déduire que si $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sont continues, alors

$$\int_a^b |fg| \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2}.$$

Optionnel. Analyse de Fourier sur les groupes abéliens compacts

Exercice 5. (Optionnel) Un *groupe topologique* est un groupe muni d'une topologie Hausdorff telle que l'opération de groupe et l'inversion sont continues. Soit $(G, *)$ un groupe topologique abélien. Un *caractère* est un homomorphisme continu de $(G, *) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$, où $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ est le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls.

Remarque. Dans le cas des groupes finis, on peut munir le groupe de la topologie discrète et donc les caractères sont tous les homomorphismes de $G \rightarrow \mathbb{C}^*$.

- a) Montrer que l'ensemble des caractères, muni du produit de fonctions, forme un groupe abélien.
- b) Montrer que si G est fini d'ordre n , alors un caractère φ est à valeurs dans $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

Exercice 6. (Optionnel) Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de la topologie quotient et soit $S = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ muni de la multiplication et de la topologie relative à $\mathbb{C}$. On tient pour acquis que ce sont des groupes topologiques. Comme $S \subseteq \mathbb{C}$ est compact dans $\mathbb{C}$ (car fermé et borné), c'est un espace topologique compact.

- a) Montrer que $h: S \rightarrow \mathbb{T}$, défini par $h(e^{i\theta}) = \theta + 2\pi\mathbb{Z}$ est un isomorphisme de groupe continu.

Remarque. Par un théorème de topologie, une fonction bijective et continue définie sur un compact est un homéomorphisme. On pourrait aussi directement montrer que h^{-1} est continue. Dans tous les cas, il en résulte que $\mathbb{T}$ est compact.

- b) Montrer que si $(G, \cdot)$ est un groupe compact, alors un caractère de G est à valeurs dans S .
- c) Montrer que, dans le cas du b), pour un caractère φ , on a $\varphi^{-1} = \overline{\varphi}$, où $\overline{\cdot}$ est la conjugaison complexe.

Exercice 7. (Optionnel) Un groupe topologique abélien $(G, +)$ agit sur lui-même naturellement par translation : pour $g \in G$, on peut définir $\tau_g: x \mapsto x + g$. On s'intéresse aux fonctions $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ qui se transforment naturellement par rapport à cette action.

- a) Montrer que si $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ est invariante par toutes les translations, c'est-à-dire $f \circ \tau_g = f$, alors f est constante.
- b) Montrer que si f vérifie plutôt $f \circ \tau_g = \varphi(g)f$, pour une certaine fonction $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$, alors φ est un caractère, pourvu que f ne soit pas identiquement nulle.
- c) Réciproquement, montrer que f est entièrement déterminé par sa valeur en 0 et par φ .
- d)† Montrer que si φ est un caractère de $\mathbb{T}$, alors $\varphi(x) = e^{ikx}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.
- e) Montrer que l'ensemble des caractères de $\mathbb{T}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

Remarque. Dans le cours, on s'intéressera à exprimer une fonction $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ comme une série $\sum c_n e^{inx}$, c'est-à-dire en terme des caractères de $\mathbb{T}$, et, plus tard, une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ comme une intégrale des caractères de $\mathbb{R}$. Le groupe des caractères d'un groupe abélien est le point de départ pour l'analyse de Fourier.