

Analyse appliquée

Nombres complexes

Exercice 1. Calculer les limites suivantes, si elles existent.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + in - 1}{in^2 + 1} \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{in}}{n} \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-in}$$

Solution. a) Réponse : $\frac{1}{i}$. b) $\left| \frac{e^{in}}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ Réponse : 0

c) Diverge, car la limite de $\cos(nx)$ (la partie réelle) diverge.

Exercice 2. Déterminer si les séries suivantes sont absolument convergentes, conditionnellement convergentes ou divergentes.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} e^{in} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi n}}{n}$$

Solution. a) Converge absolument, puisque $\left| \frac{e^{in}}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

b) Diverge, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{in} \neq 0$.

c) Comme $e^{in\pi} = (-1)^n$, on voit que c'est la série hamonique alternée, qui est conditionnellement convergente.

Exercice 3. Déterminer si les séries suivantes convergent. Si elles convergent, calculer leur valeur.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \text{ où } |z| < 1 \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+i)(n+i-1)}$$

Solution. a) C'est une série géométrique de raison $|z| < 1$, donc elle converge et elle vaut $\frac{1}{1-z}$.

b) On applique la méthode des fractions partielles, c'est-à-dire qu'on cherche $A, B \in \mathbb{C}$ tels que

$$\frac{1}{(n+i)(n+i-1)} = \frac{A}{n+i} + \frac{B}{n+i-1}.$$

(Je vous laisse faire les calculs.) On trouve $A = -1$ et $B = 1$. Ainsi, les sommes partielles de la série deviennent

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+i)(n+i-1)} = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+i-1} - \frac{1}{n+i} \right) = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{N+i}$$

car c'est une somme télescopique. On laisse $N \rightarrow \infty$ et on voit que la série converge et vaut $\frac{1}{i-1}$.

Exercice 4. (Produit de Cauchy) Soit $z = \sum z_n$ et $w = \sum w_n$ deux séries complexes absolument convergentes. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n z_k w_{n-k}$$

est absolument convergent et vaut zw .

Remarque. Ceci est essentiellement un rappel d'analyse 1. En effet, il vous suffit de reproduire exactement la preuve vue en analyse 1.

Solution. Cette preuve n'est pas vraiment importante pour le cours, donc si vous ne l'avez pas vue en analyse 1, ne vous inquiétez pas.

On pose

$$s_n = \sum_{k=0}^n z_k, \quad t_n = \sum_{k=0}^n w_k \quad \text{et} \quad p_N = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n z_k w_{n-k}.$$

On pose également $u_n = w - t_n$.

On a ensuite

$$\begin{aligned} p_N &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n z_k w_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{n=k}^N z_k w_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^N z_k \sum_{n=k}^N w_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^N z_k \sum_{j=0}^{N-k} w_j \quad (j := n - k) \quad (*) \\ &= \sum_{k=0}^N z_k t_{N-k} \\ &= \sum_{k=0}^N z_k (t - u_{N-k}) \\ &= s_N t - \sum_{k=0}^N z_k u_{N-k}. \end{aligned}$$

Comme $s_N t \rightarrow st$, il reste à montrer que $\sum_{k=0}^N z_k u_{N-k} \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $R = \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$. Comme $u_k \rightarrow 0$, il existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq M_1$, alors $|u_k| < \frac{\varepsilon}{2R+1}$. De plus, c'est une suite bornée, donc il existe $R' > 0$ tel que $|u_k| \leq R'$ pour tout k . Ensuite, comme $\sum z_k$ est absolument convergente, il existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq M_2$, on a $\sum_{k=N}^{\infty} |z_k| < \frac{\varepsilon}{2R'+1}$. Enfin, avec $M = M_1 + M_2 + 1$ et pour tout $N \geq 2M$, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^N z_k u_{N-k} \right| &\leq \sum_{k=0}^M |z_k u_{N-k}| + \sum_{k=M+1}^N |z_k u_{N-k}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2R+1} \sum_{k=0}^{\infty} |z_k| + R' \sum_{k=M+1}^N |z_k| \quad \begin{array}{l} \text{(car pour } 0 \leq k \leq M, \\ \text{on a } N-k \geq M > M_1 \\ \text{donc } |u_k| < \frac{\varepsilon}{2R+1}) \end{array} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2R+1} R + R' \frac{\varepsilon}{2R'+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où la somme à gauche tend vers 0.

Pour montrer que la série est absolument convergente, on reprend la ligne (*) ci-haut et on obtient

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n |z_k w_{n-k}| = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^{N-k} |z_k w_j| \leq \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N |z_k w_j| = \sum_{k=0}^N |z_k| \sum_{j=0}^N |w_j| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \sum_{j=0}^{\infty} |w_j|.$$

Ainsi, la somme de gauche converge lorsque $N \rightarrow \infty$.

Exercice 5. Utiliser le produit de Cauchy pour montrer que $e^{z+w} = e^z e^w$ quelque soit $z, w \in \mathbb{C}$.

Solution. Fait en classe. C'est juste pour que vous vous pratiquiez.

Exercice 6. Soit (z_n) une suite dans $\mathbb{C}$. On suppose que $z_n = x_n + iy_n$, où $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $z_n \rightarrow z$ si et seulement si $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$.

Solution. Fait en classe rapidement. Voici plus de détails.

$\Rightarrow$) On suppose que $z_n \rightarrow z$. On a vu que $|\Re w| \leq |w|$ et $|\Im w| \leq |w|$ pour $w \in \mathbb{C}$, donc

$$|\Re(z_n - z)| = |x_n - x| \leq |z_n - z| \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, donc $x_n \rightarrow x$ par le théorème des deux gendarmes (ou théorème sandwich).

La démarche est la même pour y_n .

$\Leftarrow$) On a vu que pour $w \in \mathbb{C}$, on a $|w| \leq |\Re w| + |\Im w|$. Ainsi, on a

$$|z - z_n| \leq |\Re(z - z_n)| + |\Im(z - z_n)| = |x - x_n| + |y - y_n| \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, d'où $z_n \rightarrow z$ encore par le théorème des deux gendarmes (T2G).

Exercice 7. Soit $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs réelles. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie par $f(x) = u(x) + iv(x)$. Si u et v sont dérivables (resp. intégrables), on définit

$$f'(x) := u'(x) + iv'(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b f := \int_a^b u + i \int_a^b v.$$

Montrer que si f est continue, alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, où $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

(Autrement dit, le théorème fondamental du calcul s'applique toujours pour les fonctions de $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.)

Solution. Il suffit d'appliquer le théorème fondamental du calcul 1 deux fois. Soit $u(x) = \Re(f(x))$ et $v(x) = \Im(f(x))$, de sorte que $f(x) = u(x) + iv(x)$. Soit également $U(x) = \Re(F(x))$ et $V(x) = \Im(F(x))$, de sorte que $F(x) = U(x) + iV(x)$. (Remarquons qu'on a $u(x), v(x), U(x), V(x) \in \mathbb{R}$.)

Par hypothèse, on a $F'(x) = f(x)$. Par définition, on a $F'(x) = U'(x) + iV'(x)$, il suit que $U'(x) = u(x)$ et $V'(x) = v(x)$. Par le théorème fondamental du calcul 1, on a

$$\int_a^b u = U(b) - U(a) \quad \text{et} \quad \int_a^b v = V(b) - V(a).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \int_a^b (u + iv) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b u + i \int_a^b v \\ &= U(b) - U(a) + i(V(b) - V(a)) \\ &= (U(b) + iV(b)) - (U(a) + iV(a)) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^\pi e^{ix} dx$

b) $\int_{-\pi}^\pi x e^{ix} dx$

Solution. D'abord, calculons la dérivée de $x \mapsto e^{icx}$, où $c \in \mathbb{C}$ est une constante quelconque. On a

$$(e^{icx})' = (\cos(cx) + i \sin(cx))' = -c \sin(cx) + ic \cos(cx) = ic(\cos(cx) + i \sin(cx)) = ice^{icx}.$$

Il s'ensuit que $x \mapsto \frac{e^{icx}}{ic}$ est une primitive de $x \mapsto e^{icx}$. Il est donc possible d'appliquer le numéro précédent.

$$\text{a) } \int_0^\pi e^{ix} \mathrm{d}x = \frac{e^{ix}}{i} \Big|_0^\pi = \frac{e^{i\pi} - e^0}{i} = \frac{(-1) - 1}{i} = -\frac{2}{i} = 2i$$

b) On intègre par partie. On a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi x e^{ix} \mathrm{d}x &= \frac{x e^{ix}}{i} \Big|_{-\pi}^\pi - \frac{1}{i} \int_{-\pi}^\pi e^{ix} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi e^{i\pi} + \pi e^{-i\pi}}{i} - \frac{e^{ix}}{i^2} \Big|_{-\pi}^\pi \\ &= -2i\pi e^{i\pi} + e^{i\pi} - e^{-i\pi} \\ &= -2i\pi(-1) + (-1) - (-1) \\ &= 2i\pi \end{aligned}$$