

Un aide-mémoire d'une page recto est permis. Aucune autre documentation ou aide ne sont permises (pas de calculatrice). N'oubliez pas d'inscrire votre nom sur votre cahier d'examen et de **justifier toutes vos réponses**. Le total est sur 100. Bonne chance!

1. (a) (10 points) Déterminer si la fonction $f(x) = \cos(\sin(x))$ a une parité et si oui, laquelle.
- (b) (10 points) Déterminer si la fonction $g(x) = \sum_{n=1}^5 \sin\left(\frac{2\pi x}{n}\right)$ est périodique.

2. Soit $f(x) = \sin(x/2)$ pour $x \in [-\pi, \pi)$ prolongée en une fonction 2π -périodique.

- (a) (20 points) Calculer les coefficients de Fourier (réels) de f .
- (b) (10 points) En quels points la série de Fourier de f converge-t-elle vers f ?
- (c) (10 points) Évaluer la série de Fourier de f en un point bien choisi pour montrer l'identité

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m+1)}{16m^2 + 16m + 3}.$$

3. (20 points) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue 2π -périodique. Montrer qu'il existe une fonction 2π -périodique $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$ si et seulement si $c_0(f) = 0$.

4. (a) (10 points) Montrer que pour toute suite $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, il existe une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ telle que les moyennes de Cesàro

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$$

coïncident avec les s_n (expliquer comment définir les a_n à partir des s_n).

- (b) (10 points) Trouver une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ qui ne converge pas au sens de Cesàro, mais la suite des moyennes $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ converge au sens de Cesàro. Autrement dit, il faut appliquer les moyennes deux fois pour obtenir la convergence.