

Analyse appliquée

Nombres complexes

Exercice 1. Calculer les limites suivantes, si elles existent.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + in - 1}{in^2 + 1}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{in}}{n}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-in}$

Exercice 2. Déterminer si les séries suivantes sont absolument convergentes, conditionnellement convergentes ou divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi n}}{n}$

Exercice 3. Déterminer si les séries suivantes convergent. Si elles convergent, calculer leur valeur.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, où $|z| < 1$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+i)(n+i-1)}$

Exercice 4. (Produit de Cauchy) Soit $z = \sum z_n$ et $w = \sum w_n$ deux séries complexes absolument convergentes. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n z_k w_{n-k}$$

est absolument convergent et vaut zw .

Remarque. Ceci est essentiellement un rappel d'analyse 1. En effet, il vous suffit de reproduire exactement la preuve vue en analyse 1.

Exercice 5. Utiliser le produit de Cauchy pour montrer que $e^{z+w} = e^z e^w$ quelque soit $z, w \in \mathbb{C}$.

Exercice 6. Soit (z_n) une suite dans $\mathbb{C}$. On suppose que $z_n = x_n + iy_n$, où $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $z_n \rightarrow z$ si et seulement si $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$.

Exercice 7. Soit $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs réelles. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie par $f(x) = u(x) + iv(x)$. Si u et v sont dérivables (resp. intégrables), on définit

$$f'(x) := u'(x) + iv'(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b f := \int_a^b u + i \int_a^b v.$$

Montrer que si f est continue, alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, où $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

(Autrement dit, le théorème fondamental du calcul s'applique toujours pour les fonctions de $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.)

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^\pi e^{ix} dx$

b) $\int_{-\pi}^\pi xe^{ix} dx$