

Analyse appliquée

Devoir 1

Automne 2026

Jonathan Godin

Si vous utilisez un résultat du cours, indiquez d'où il provient (p.ex. « par un théorème du chapitre 1 » ou « par l'exercice 12 de la série 1 » ou « par le théorème des deux gendarmes »).

Le devoir est à remettre **vendredi le 16 octobre** au début du TP en papier. Vous avez plusieurs semaines pour faire le devoir, donc **aucun retard n'est accepté**.

Propreté.

1. Je vous encourage à taper votre devoir en T_EX (ou en Word...). Dans ce cas, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Cependant, il est permis de remettre un devoir écrit à la main (sur papier ou sur une tablette et ensuite imprimé) **si les consignes suivantes sont respectées** :
 - écrire à double-interligne;
 - écrire recto seulement;
 - écrire sur du papier blanc ou ligné
 - écrire *très propre, lisiblement et gros*.(mais pas quadrillé!);

Si l'un de ces critères n'est pas rempli, vous serez pénalisé ou, dans un cas extrême, je n'accepterai pas le devoir.

Question 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que α/π est irrationnel. Soit $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f.$$

(Indiquer clairement à quel endroit l'hypothèse que α/π irrationnel intervient.)

Indice. Commencez par le cas où $f(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Question 2. Soit $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\int_{-\pi}^{\pi} |f|$ est convergente. Soit $x \in \mathbb{T}$. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} dt \quad (*)$$

converge.

- a) Montrer qu'alors $SF_n(f)(x) \rightarrow f(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- b) Trouver un exemple d'une fonction $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f vérifie (*) en un point x , mais f n'a pas de dérivée ni à droite, ni à gauche¹ en ce point x .

¹ C'est-à-dire les limites $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ divergent.

Question 3. Soit $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ définie sur $(0, \pi]$.

- a) Calculer une série en sinus pour f .
- b) Montrer que la série obtenu au a) converge vers f sur $(0, \pi)$.
- c) Pour $x \in [0, \pi]$, on pose

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \sin(nx).$$

Montrer que g est bien définie et que $g(x) = \begin{cases} x(\pi-1)/2, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ (\pi-x)/2, & \text{si } 1 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

- d) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n} \right)^2$$

et calculer la valeur commune de ces séries.

Question 4. Soit $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On pose

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx} \quad (*)$$

là où la série converge, avec $c_n(f)$ le n -ième coefficient de Fourier de f .

- a) Montrer que si la série $(*)$ converge uniformément (vers g) sur $\mathbb{T}$ et si f est continue en x , alors $f(x) = g(x)$.

Suggestion. Le problème est peut-être plus facile à conceptualiser si on pose $h = f - g$ et qu'on ramène le problème à h .

- b) Montrer que si f possède au moins une discontinuité de saut, alors la série $(*)$ ne converge pas uniformément.

Remarque. La partie a) reste vraie si on assouplit l'hypothèse que f est continue par morceaux en la remplaçant par « f est Riemann-intégrable » (voire $f \in L^2$). En effet, il est possible de généraliser le théorème que vous utilisez à la partie a) en utilisant le fait qu'il existe une suite (f_n) de fonctions continues telles que $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ce dernier fait est un exercice du niveau d'analyse 2 (resp. théorie de la mesure pour $f \in L^2$).