

# Analyse appliquée

## Devoir 1

Automne 2026

Jonathan Godin

Si vous utilisez un résultat du cours, indiquez d'où il provient (p.ex. « par un théorème du chapitre 1 » ou « par l'exercice 12 de la série 1 » ou « par le théorème des deux gendarmes »).

Le devoir est à remettre **vendredi le 16 octobre** au début du TP en papier. Vous avez plusieurs semaines pour faire le devoir, donc **aucun retard n'est accepté**.

### Propreté.

1. Je vous encourage à taper votre devoir en  $\text{\TeX}$  (ou en Word...). Dans ce cas, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Cependant, il est permis de remettre un devoir écrit à la main (sur papier ou sur une tablette et ensuite imprimé) **si les consignes suivantes sont respectées** :
  - écrire à double-interligne;
  - écrire recto seulement;
  - écrire sur du papier blanc ou ligné
  - écrire *très propre, lisiblement et gros*.(mais pas quadrillé!);

Si l'un de ces critères n'est pas rempli, vous serez pénalisé ou, dans un cas extrême, je n'accepterai pas le devoir.

**Question 1.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha/\pi$  est irrationnel. Soit  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f.$$

(Indiquer clairement à quel endroit l'hypothèse que  $\alpha/\pi$  irrationnel intervient.)

*Indice.* Commencez par le cas où  $f(x) = e^{ikx}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Question 2.** Soit  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $\int_{-\pi}^{\pi} |f|$  est convergente. Soit  $x \in \mathbb{T}$ . On suppose qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} dt \quad (*)$$

converge.

- a) Montrer qu'alors  $SF_n(f)(x) \rightarrow f(x)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
- b) Trouver un exemple d'une fonction  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f$  vérifie (\*) en un point  $x$ , mais  $f$  n'a pas de dérivée ni à droite, ni à gauche<sup>1</sup> en ce point  $x$ .

---

<sup>1</sup> C'est-à-dire les limites  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  et  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  divergent.

**Question 3.** Soit  $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$  définie sur  $(0, \pi]$ .

- a) Calculer une série en sinus pour  $f$ .
- b) Montrer que la série obtenu au a) converge vers  $f$  sur  $(0, \pi)$ .
- c) Pour  $x \in [0, \pi]$ , on pose

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \sin(nx).$$

Montrer que  $g$  est bien définie et que  $g(x) = \begin{cases} x(\pi-1)/2, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ (\pi-x)/2, & \text{si } 1 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

- d) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin(n)}{n} \right)^2$$

et calculer la valeur commune de ces séries.

**Question 4.** Soit  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux. On pose

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx} \quad (*)$$

là où la série converge, avec  $c_n(f)$  le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f$ .

- a) Montrer que si la série  $(*)$  converge uniformément (vers  $g$ ) sur  $\mathbb{T}$  et si  $f$  est continue en  $x$ , alors  $f(x) = g(x)$ .

*Suggestion.* Le problème est peut-être plus facile à conceptualiser si on pose  $h = f - g$  et qu'on ramène le problème à  $h$ .

- b) Montrer que si  $f$  possède au moins une discontinuité de saut, alors la série  $(*)$  n'est pas uniformément converge sur  $\mathbb{T}$ .

*Attention!* Si on suppose le contraire, alors c'est qu'on suppose que la série  $\sum c_n(f) e^{inx}$  converge uniformément vers  $g$  (et non vers  $f$ ). Sous cette hypothèse,  $g$  est continue, mais même si  $f$  ne l'est pas, cela n'est pas une contradiction en soi, car il est possible que  $f \neq g$ . Il faut chercher un peu plus loin.

*Remarque.* La partie a) reste vraie si on assouplit l'hypothèse que  $f$  est continue par morceaux en la remplaçant par «  $f$  est Riemann-intégrable » (voire  $f \in L^2$ ). En effet, il est possible de généraliser le théorème que vous utilisez à la partie a) en utilisant le fait qu'il existe une suite  $(f_n)$  de fonctions continues telles que  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Ce dernier fait est un exercice du niveau d'analyse 2 (resp. théorie de la mesure pour  $f \in L^2$ ).