Analyse appliquée

Examen intra – automne 2026

Faculté des arts et des sciences – Département de mathématiques et de statistique

Enseignant : Jonathan Godin — 30 ocotobre 2026
Sigle : MAT2466A
Automne 2026

L'examen dure 110 minutes. Vous n'avez droit à aucun matériel, autre qu'un crayon (ou un stylo) et une efface. **Justifiez toutes vos réponses.**

/45

Quelques rappels

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \qquad \sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x,$$

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, \qquad e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Inégalité de Bessel $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2$ Parseval $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2$

Cauchy-Schwarz $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, en particulier $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2\|g\|_2$

L-périodique $c_n^L(f) = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)e^{-\frac{2i\pi nx}{L}}dx$

Questions courtes.

Question 1. (10pts) Soit $f, g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues par morceaux.

a) Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} SF_n(f)\overline{g} = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\overline{c_k(g)}.$$

b) Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)}.$$

Question 2. (5pts) Montrer qu'il n'existe aucune fonction *intégrable* $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ telle que $c_n(f) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Question 3. (10pts) Soit $f\colon (0, \pi] \to \mathbb{C}$ une fonction.

a) Expliquer comment prolonger f en une fonction $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est π-périodique.

b) On suppose que $\tilde{f}$ est intégrable. Montrer que $c_n(\tilde{f}) = 0$ pour tout n impair, où $c_n(\tilde{f})$ est le coefficient habituel, c'est-à-dire $c_n(\tilde{f}) = c_n^{2\pi}(\tilde{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$.

(Suite au verso)

Question longue.

Question 4. (20pts) a) On définit la fonction

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x \leq \pi, \\ \alpha, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0, \end{cases} \qquad (*)$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$ est une constante. Calculer $c_n(H)$ (ou, si vous préférez, $a_n(H)$ et $b_n(H)$).

b) Montrer par calcul direct que $SF_n(H)(0) \to \frac{1}{2}$ lorsque $n \to \infty$.

c) Soit $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable telle que que $f(0^+) := \lim_{x\to 0^+}(x)$ et $f(0^-) := \lim_{x\to 0^-} f(x)$ existent. On pose $s := f(0^+) - f(0^-)$ et on suppose que $s \neq 0$. Montrer qu'en choisissant bien α dans $(*)$, alors

$$g(x) := f(x) - sH(x) - f(0^-)$$

est continue en 0.

d) Montrer que $\sigma_n(f)(0) \to \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}$ lorsque $n \to \infty$, où $\sigma_n(f)$ est la moyenne de Cesàro de $SF_n(f)$.
Indice. Commencez par justifier que $\sigma_n(g)(0) \to g(0)$.