Analyse appliquée

Examen intra – automne 2026 – Solutionnaire

Faculté des arts et des sciences – Département de mathématiques et de statistique

Enseignant : Jonathan Godin
Sigle : MAT2466A
Automne 2026

30 ocotobre 2026

L'examen dure 110 minutes. Vous n'avez droit à aucun matériel, autre qu'un crayon (ou un stylo) et une efface. **Justifiez toutes vos réponses.**

Questions courtes.

Question 1. (10pts) Soit $f, g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues par morceaux.

a) Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} SF_n(f)\overline{g} = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\overline{c_k(g)}.$$

b) Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)}.$$

Solution. a) On peut l'écrire de façon concise en

$$\langle SF_n(f), g\rangle = \left\langle \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k, e\right\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\langle e_k, g\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\overline{\langle g, e_k\rangle} = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\overline{c_k(g)},$$

où $e_k(x) = e^{ikx}$. On peut aussi le faire directement par

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} SF_n(f)\overline{g} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k\overline{g} = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k\overline{g}\\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_{-k}g} = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\overline{c_k(g)}\end{aligned}$$

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\overline{c_k(g)} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}\right| \overset{\text{a)}}{=} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f - SF_n(f))\overline{g}\right| = |\langle f - SF_n(f), g\rangle| \le \|f - SF_n(f)\|_2\|g\|_2.$$

Comme f est continue par morceaux, il suit que $\|f - SF_n(f)\|_2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Question 2. (5pts) Montrer qu'il n'existe aucune fonction *intégrable* $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ telle que $c_n(f) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Solution. Par l'inégalité de Bessel, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Si $c_n(f) = 1$, alors le côté gauche donne $+\infty$, mais le côté droit serai un nombre fini, ce qui est impossible.

Question 3. (10pts) Soit $f\colon (0, \pi] \to \mathbb{C}$ une fonction.

a) Expliquer comment prolonger f en une fonction $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est π-périodique.

b) On suppose que $\tilde{f}$ est intégrable. Montrer que $c_n(\tilde{f}) = 0$ pour tout n impair, où $c_n(\tilde{f})$ est le coefficient habituel, c'est-à-dire $c_n(\tilde{f}) = c_n^{2\pi}(\tilde{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$.

Solution. a) On a vu en classe comment le faire pour une fonction 2π-périodique. C'est le même principe. Pour tout $x \in (0, \pi]$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit

$$\tilde{f}(x + n\pi) := f(x).$$

b) On effectue le changement de variable $u = x + \pi$ pour obtenir

$$\begin{aligned} c_n(\tilde{f}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \tilde{f}(u-\pi)e^{-inu+i\pi}\mathrm{d}u \\ &= (-1)^n \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \tilde{f}(u)e^{-inu}\mathrm{d}u = (-1)^n c_n(\tilde{f}). \end{aligned}$$

Si n est impaire, alors $c_n(\tilde{f}) = -c_n(\tilde{f})$, ce qui mène à la conclusion que $c_n(\tilde{f}) = 0$.

Question longue.

Question 4. (20pts) a) On définit la fonction

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x \leq \pi, \\ \alpha, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0, \end{cases} \qquad (*)$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$ est une constante. Calculer $c_n(H)$ (ou, si vous préférez, $a_n(H)$ et $b_n(H)$).

b) Montrer par calcul direct que $SF_n(H)(0) \to \frac{1}{2}$ lorsque $n \to \infty$.

c) Soit $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable telle que que $f(0^+) := \lim_{x\to 0^+}(x)$ et $f(0^-) := \lim_{x\to 0^-} f(x)$ existent. On pose $s := f(0^+) - f(0^-)$ et on suppose que $s \neq 0$. Montrer qu'en choisissant bien α dans $(*)$, alors

$$g(x) := f(x) - sH(x) - f(0^-)$$

est continue en 0.

d) Montrer que $\sigma_n(f)(0) \to \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}$ lorsque $n \to \infty$, où $\sigma_n(f)$ est la moyenne de Cesàro de $SF_n(f)$.
Indice. Commencez par justifier que $\sigma_n(g)(0) \to g(0)$.

Solution. a) Pour calculer $c_n(H)$, la valeur de α n'a aucune importance. Pour $n = 0$, on a $c_0(H) = \frac{1}{2}$ (aire d'un rectangle). Pour $n \neq 0$, on a

$$c_n(H) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^\pi = i\frac{(-1)^n-1}{2\pi n}$$

b) On voit que $a_n(H) = 0$ $(n \neq 0)$ et $b_n(H) = \frac{(-1)^n-1}{\pi n}$. Ainsi, on a

$$SF_n(H)(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^n-1}{\pi n}\sin(kx).$$

Il suit que $SF_n(H)(0) = \frac{1}{2}$ quelque soit n, donc $SF_n(H)(0) \to \frac{1}{2}$.

c) D'une part, lorsque $x \to 0^+$, on obtient

$$g(x) \to f(0^+) - sH(0^+) - f(0^-) = f(0^+) - f(0^-) - s = 0,$$

car $H(0^+) = 1$. D'où $g(0^+) = 0$.

D'autre part, lorsque $x \to 0^-$, on trouve

$$g(x) \to f(0^-) - sH(0^-) - f(0^-) = 0,$$

car $H(0^-) = 0$. D'où $g(0^-) = 0$.

Ainsi, pour que g soit continue en 0, il faut $g(0) = 0$. Cela est possible ssi

$$0 = f(0) - s\alpha - f(0^-),$$

donc $\alpha = \frac{f(0)-f(0^-)}{s} = \frac{f(0)-f(0^-)}{f(0^+)-f(0^-)}$.

d) Comme g est continue en 0, on sait que $\sigma_n(g)(0) \to g(0) = 0$. De plus, par le b), comme $SF_n(H)(0) \to \frac{1}{2}$, il suit que $\sigma_n(H)(0) \to \frac{1}{2}$. Enfin, comme $f(0^-)$ est une constante, on a $\sigma_n(f(0^-))(0) = f(0^-)$. En combinant, on trouve

$$\sigma_n(f)(0) = \sigma_n(g + sH + f(0^-))(0) \to g(0) + \frac{s}{2} + f(0^-) = 0 + \frac{s}{2} + f(0^-),$$

donc $\sigma_n(f)(0)$ converge vers $\frac{s}{2} + f(0^-) = \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}$.