Analyse 2

Série 6

Séries de Fourier

Exercice 0. [1] Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{R}$ $(1 \leq k \leq p)$ et $b_m \in \mathbb{R}$ $(1 \leq m \leq q)$.

a) Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_k\right)\left(\sum_{m=1}^{q} b_m\right) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{m=1}^{q} a_k b_m.$$

b) Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{m=1}^{q} b_m\right)^2 = \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{p} a_k a_\ell + 2\sum_{k=1}^{p}\sum_{m=1}^{q} a_k b_m + \sum_{m=1}^{q}\sum_{n=1}^{q} b_m b_n.$$

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π-périodique. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f.$$

Exercice 2. Calculer la série de Fourier des fonctions $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ suivantes.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$

Exercice 3. Soit $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Étudier la convergence uniforme de la série de Fourier de f.

[1] Le numéro 0 n'est pas un exercice sur les séries de Fourier. Par contre, il vous sera probablement utile de bien maîtriser la manipulation des sommes.

Exercice 4. a) Montrer que pour $f, g\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ intégrable, on a $c_n(f+g) = c_n(f)+c_n(g)$ et $c_n(Cf) = Cc_n(f)$, avec C est une constante, lorsque $c_n(f)$ représente $a_n(f)$ ou bien $b_n(f)$.

b) Montrer que si f est une constante, alors $c_n(f) = 0$ pour tout $n \neq 0$.

c) Calculer la série de Fourier de $f(x) = x + \frac{\pi}{4}$.

Exercice 5. Soit $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable telle que $f(-\pi) = f(\pi)$.

a) Montrer que

$$a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n} \qquad \text{et} \qquad b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}.$$

b) Déduire que si f' est continûment dérivable et si $f'(-\pi) = f'(\pi)$, alors $a_n(f) = -\frac{a_n(f'')}{n^2}$ et $b_n(f) = -\frac{b_n(f'')}{n^2}$.

c) Déduire à partir du b) (sans faire appel au théorème de convergence du chapitre 6) que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$, si f vérifie les hypothèses du b).

Exercice 6. Soit $c \in (0, \pi)$ et $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq |x| \leq c, \\ 0, & \text{si } c < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

a) Calculer la série de Fourier de f.

b) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nc)}{n} = \frac{\pi - 2c}{2}.$$

Exercice 7. Soit $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{(\pi^2 x - x^3)}{3}.$$

a) Déterminer la série de Fourier de f.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$. (Utilisez l'égalité de Parseval (numéro 11).)

Exercice 8†. Soit $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues et 2π-périodique. On pose $h(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $h(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$.

b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n(h) = a_n(f)a_n(g) - b_n(f)b_n(g) \qquad \text{et} \qquad b_n(h) = a_n(f)b_n(g) + b_n(f)a_n(g).$$

c) Montrer que si f est dérivable et f' est régulière par morceaux et 2π-périodique, alors h est dérivable. Montrer que le résultat reste vrai si g vérifie les hypothèses à la place de f.

Exercice 9. On suppose qu'il existe une fonction intégrable $\delta \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ telle que pour toute fonction $f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ intégrable et continue en 0, on ait $\int_{-\pi}^{\pi} f\delta = f(0)$. (Une telle fonction n'existe pas, mais on suppose que oui, pour l'exercice.)

a) Calculer les coefficients de la série de Fourier de δ. Montrer que sa série de Fourier est

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} D_N.$$

b) Cette série de Fourier converge-t-elle?

c) Montrer que[1] pour toute fonction $f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continûment dérivable, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fD_N = f(0).$$

Indice. Inspirez-vous de la démonstration du théorème de convergence d'une série de Fourier.

Exercice 10. (Densité des polynômes trigonométriques). Soit $f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et régulière par morceaux. Montrer que si $f(-\pi) = f(\pi)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique s_n tel que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f - s_n)^2 < \varepsilon.$$

(Cet énoncé est vrai sans l'hypothèse de la régularité par morceaux, mais on ne peut pas le montrer dans ce cours.)

---

[1] C'est l'énoncé le plus proche de « $\frac{1}{\pi}D_N \to \delta$ lorsque $N \to \infty$ » que l'on puisse donner dans un cours d'analyse 2. En effet, on peut voir la conclusion du numéro comme une forme faible de convergence.

Exercice 11. Soit $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et régulière par morceaux telle que $f(-\pi) = f(\pi)$.

a) Soit s_n les sommes partielles de la série de Fourier de f. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (s_n - f)^2 = 0.$$

b) (Égalité de Parseval). Montrer que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\big).$$

Indice. Lorsque l'on développe, on obtient $(f - s_n)^2 = f^2 - 2fs_n + s_n^2$. Étudiez l'intégrale de $-\pi$ à π de chaque partie séparemment.

Exercice 12. Prologer $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ en une fonction $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est 2π-périodique et dont la série de Fourier est une série en cosinus.

a) $f(x) = \sin x$ $f(x) = x^3$

Exercice 13. Soit $a < b$.

a) Soit $u\colon [-\pi, \pi] \to [a, b]$ et $v\colon [a, b] \to [-\pi, \pi]$ deux fonctions affines de la forme $u(t) = \alpha t + \beta$ et $v(x) = \gamma x + \delta$, avec $\alpha, \gamma > 0$. Déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et montrer que $u^{-1} = v$.

b) Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction régulière par morceaux. On définit $g := f \circ u\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$a_n(g) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\big(nv(x)\big) \mathrm{d}x.$$

De même, constater que

$$b_n(g) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\big(nv(x)\big) \mathrm{d}x.$$

c) Déterminer la limite de la série trigonométrique

$$\frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) \cos\big(nv(x)\big) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(g) \sin\big(nv(x)\big). \tag{$*$}$$

d) Montrer que si f est continue et si $f(a) = f(b)$, alors la série $(*)$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Remarque. Cet exercice démontre le théorème suivant.

Théorème. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction régulière par morceaux. Alors la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\tfrac{n\pi}{b-1}(2x-b-a)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{b-1}(2x-b-a)\right)$$

converge vers

$$\begin{cases} \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & \text{si } x \in (a,b), \\ \dfrac{f(a+)+f(b^-)}{2}, & \text{si } x \in \{a,b\}, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b-a}(2x-b-a)\right)\mathrm{d}x, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ b_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b-a}(2x-b-a)\right)\mathrm{d}x, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

De plus, si f est continue et si $f(a) = f(b)$, alors la série converge uniformément vers f sur $[a,b]$.