Analyse 2

Série 5

Fonctions transcendantes

1. exp et log

Exercice 1. On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *convexe* sur I si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a
$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$
On dit que f est *concave* si $-f$ est convexe.

a) Montrer que si f est deux fois dérivable et si $f''(x) \geq 0$ sur I, alors f est convexe.

b) Montrer que exp est convexe sur $\mathbb{R}$ et que log est concave sur $(0, \infty)$.

Exercice 2. On tient pour acquis que la composition de fonctions analytiques est encore analytique là où la composition est possible. (Cela se montre sans problème dans un cours d'analyse complexe.) Montrer que les fonctions suivantes sont analytiques, en donnant pour chacune le domaine sur lequel elles sont analytiques.

a) $f(x) = \sqrt{1+x}$

b) $f(x) = x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 3. a) En utilisant les propriétés de exp et log, montrer que
$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculer les limites suivantes. (*Suggestion.* Utilisez les petits o, car la règle de l'Hôpital, bien qu'elle fonctionne, occasionne un calcul plus compliqué.)

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n^2+2n-1}\right)^{\frac{1}{n^2}}$ *ii)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right)^{\sqrt{n^2+n}}$

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{b_n}$, où $a_n \to \infty$ et $\frac{b_n}{a_n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 4. Soit
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est dérivable.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que pour $x > 0$

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-\frac{1}{x}}.$$

c) Montrer que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

d) Conclure que f ne peut pas s'exprimer comme série entière en 0 et ce, même si la série de Taylor de f en 0 converge.

Solution. a) Il est clair que f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour le point à l'origine, on utilise la définition de la dérivée. On a

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = 0$$

et il est clair que la limite à gauche vaut également 0. On conclut que $f'(0)$ existe et vaut 0.

b) Pour $n = 1$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}},$$

donc on peut prendre $P_1(x) = 1$ et $Q_1(x) = \frac{1}{x^2}$. Ensuite, on suppose que P_n et Q_n existent et on montre que le cas $n+1$. On a

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-\frac{1}{x}} \right)' = \left(\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right)' e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Le numérateur et le dénumérateur de

$$\left(\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right)' + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \frac{1}{x^2}$$

donnent P_{n+1} et Q_{n+1} respectivement.

c) Par la définition de la dérivée et le b), on obtient l'équation suivante

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P_n(h)}{h Q_n(h)} e^{-\frac{1}{h}}.$$

Il suffit de montrer que $\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h Q_n(h)}$ existe et vaut 0, puisque celle de $P_n(h)$ existe. Si Q_n possède un zéro de multiplicité k en 0, alors on peut écrire $Q_n(x) = x^n R_n(x)$ où $R_n(0) \neq 0$. Ensuite, on a

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^{k+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^{k+1}}} = 0$$

pour tout $k > 0$. (En effet, on a montré en classe que $x^{-k} e^x \to \infty$ lorsque $x \to \infty$ pour tout k.) On conclut que $f^{(n)}(0) = 0$.

Enfin, notons que $f^{(n+1)}(0)$ existe pour tout n, donc $f^{(n)}$ est continue en 0 pour tout n. Ainsi, $f^{(n)}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout n.

d) La série de Taylor de f en 0 est

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = 0.$$

Ainsi, il est clair que la série converge et possède un rayon de converge infini. Cependant, pour tout $x > 0$, on a $e^{-\frac{1}{x}} \neq 0$, donc S ne converge pas vers f sur tout voisinage de 0.

Exercice 5. (Inégalité de Grönwall) Soit $f, g \colon [a,b] \to [0,\infty)$ des fonctions positives et continues. Montrer que s'il existe $C \geq 0$ tel que

$$f(x) \leq C + \int_a^x fg \qquad \text{pour tout } x \in [a,b],$$

alors

$$f(x) \leq C \exp\left(\int_a^x g\right).$$

Indice. Faites le cas $C > 0$ en posant $h(x) = C + \int_a^x fg$. Montrez le cas $C = 0$ à l'aide d'une suite (C_n) telle que $C_n \downarrow 0$.

Exercice 6. Soit la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right).$$

a) Montrer que f converge uniformément vers $\frac{1}{2}\log(x+1)$ sur $[-a,a]$ pour tout $0 < a < 1$.

b) Montrer que $f(1) = \log 2$. (Utiliser le théorème d'Abel, exercice 31.)

Solution. a) Montrons que la série de f converge uniformément, ainsi que cette série dérivée terme à terme. On a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right| &= |x|^{n+1} \left| \frac{x^n}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right| \\
&\leq |a|^{n+1} \left(\left| \frac{x^n}{2n+1} \right| + \left| \frac{1}{2n+2} \right| \right) \\
&\leq |a|^{n+1}(1+1) \\
&= 2a^{n+1}.
\end{aligned}$$

Par le critère de Weierstrass, la série f converge uniformément sur $[-a,a]$.

Ensuite, pour la série $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(x^{2n} - \frac{x^n}{2}\right)$, on a

$$\begin{aligned}\left|x^{2n} - \frac{x^n}{2}\right| &\leq a^{2n} + \frac{a^n}{2} \\ &\leq a^n(1+1) \\ &= 2a^n.\end{aligned}$$

Ainsi, on peut conclure que f est dérivable et que $f'(x) = g(x)$.

Si on examen g, on voit que

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{2n} - \frac{x^n}{2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2} \\ &= \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2(1-x)} \\ &= \frac{2-1-x}{2(1-x^2)} \\ &= \frac{1}{2(1+x)}.\end{aligned}$$

Si on intègre, on obtient $f(x) = \frac{1}{2}\log(1+x) + C$. Puisque $f(0) = 0$, on obtient $C = 0$.

b) D'une part, on a

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

D'autre part, on sait que

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n},$$

pour $x \in (-1,1)$. Puisque $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, par le théorème d'Abel, il suit que $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0,1]$. Ainsi, cette série est continue sur $[0,1]$ et puisque $\log(1+x) = \sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ sur $[0,1)$, en laissant $x \to 1$, on obtient que $\log(2) = \sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 7. Soit $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(xy) = f(x) + f(y)$. On suppose que $f'(1) > 0$ et on pose $C = e^{\frac{1}{f'(1)}}$.

a) Montrer que $f(1) = 0$.

b) Montrer que $xf'(x) = f'(1)$.

c) Montrer que $f(x) = \frac{\log x}{\log C}$, c'est-à-dire $f(x) = \log_C x$.

2. sin et cos

Exercice 8. Montrer à l'aide de la définition de sinus et de cosinus que

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Solution. a) On a

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

La série à droite est encore une série entière de rayon de convergence infini, donc c'est une fonction continue. Ainsi, on a

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^{2n}}{(2n+1)!} = 1.$$

b) Comme au a), on a

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n)!}.$$

La nouvelle série est encore une série entière de rayon de convergence infini, donc elle est continue en 0 et on obtient

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 0^{2n-2}}{(2n)!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 9. À l'égard de tou·te·s les physicien·ne·s, donner un sens mathématique le plus proche possible de ce qu'il est entendu par « $\sin x = x$ lorsque x est petit ».

Solution. À l'exercice précédent, on a montré que $\sin x = o(1)$. Ce n'est probablement pas suffisant pour les physicien·ne·s. On peut alors montrer que $\sin x = x + o(x^2)$, ce qui est probablement suffisant pour la plupart des applications.

Il est possible qu'il faille aller plus loin dans le développement. On trouverait alors $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, etc.

Exercice 10. a) Montrer les identités

$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$
$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b).$$

b) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Calculer

$$\int \cos(ax)\cos(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 11. Montrer que $f(x) = \arcsin(x)$ est analytique sur $(-1,1)$. Déduire que $g(x) = \arccos(x)$ est également analytique sur cet intervalle.

Exercice 12. a) Pour tout k, montrer que

$$\sin\Big((k+\tfrac{1}{2})x\Big) - \sin\Big((k-\tfrac{1}{2})x\Big) = 2\sin(\tfrac{x}{2})\cos(kx).$$

b) En déduire que

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin\Big((n+\frac{1}{2})x\Big)}{2\sin(\frac{x}{2})}.$$

c) En utilisant une technique semblable, montrer également que

$$\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Exercice 13. a) Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \tag{$*$}$$

converge uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(On tient pour acquis le lemme d'Abel, voir l'exercice 29.)

b) Montrer que lorsque $x = \frac{\pi}{N}$, alors

$$\left|\sum_{k=N}^{2N} \sin(kx)\right| = \left|\sum_{k=0}^{N} \sin(kx)\right| \geq \frac{N}{\pi}$$

pour tout N assez grand. Conclure que

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} \left|\sum_{k=N}^{2N} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \geq \frac{1}{2\pi}$$

et que la série $(*)$ ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$.

Solution. a) Par le 12b), on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin(\frac{x}{2})}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right|}.$$

Par le lemme d'Abel, on a pour $m > n$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \frac{2}{n\left|\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right|}.$$

On laisse $m \to \infty$ pour obtenir

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \frac{2}{n\left|\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right|}.$$

Si on prend le supremum sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, on voit que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]} \left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\right| = 0.$$

b) On a

$$\left|\sum_{k=N}^{2N} \sin\left(k\tfrac{\pi}{N}\right)\right| = \left|\sum_{k=N}^{2N} \sin\left(k\tfrac{\pi}{N} - \tfrac{N\pi}{N}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{N} \sin\left(k\tfrac{\pi}{N}\right)\right|.$$

On peut enlever les valeurs absolues, puisque chaque terme de la somme est positif. Ensuite, on considère la partition $P = \{0, \frac{\pi}{N}, \ldots, (N-1)\frac{\pi}{N}, \pi\}$. On obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \sin\left(k\tfrac{\pi}{N}\right) &= \frac{N}{\pi}\frac{\pi}{N}\sum_{k=0}^{N} \sin\left(k\tfrac{\pi}{N}\right) \\ &\geq \frac{N}{\pi} I(\sin, P).\end{aligned} \tag{$*$}$$

(Remarque : j'ai trouvé une autre solution un peu plus direct. Je l'ai mise après celle-ci.) Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{3} - 1$. On sait qu'un tel nombre existe puisque $\pi > 3$ par le numéro 6. Si N est assez grand, alors il existe k_1, k_2 tels que

$$\tfrac{\pi}{6} \leq \tfrac{k_1\pi}{N} < \tfrac{\pi}{6} + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \tfrac{5\pi}{6} - \varepsilon \leq \tfrac{k_2\pi}{N} < \tfrac{5\pi}{6}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
I(\sin, P) &= \sum_{j=1}^{N} m_j \tfrac{\pi}{N} \\
&\geq \sum_{j=k_1}^{k_2} m \tfrac{\pi}{N} && \text{(où } m = \inf_{[\frac{k_1\pi}{N}, \frac{k_2\pi}{N}]} \sin x\text{)} \\
&= \inf_{[\frac{k_1\pi}{N}, \frac{k_2\pi}{N}]} \sin x \left(\tfrac{k_2\pi}{N} - \tfrac{k_1\pi}{N}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} - 2\varepsilon\right) \\
&= \frac{\pi}{3} - \varepsilon > 1.
\end{aligned}$$

On conclut finalement que

$$\sum_{k=0}^{N} \sin\left(k\tfrac{\pi}{N}\right) > \frac{\pi}{N}.$$

Comme deuxième solution, on repart de l'équation $(*)$. On voit qu'il y a une somme de Riemann, donc on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{N} \sum_{k=0}^{N} \sin\left(k\tfrac{\pi}{N}\right) = \int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = 2.$$

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que si $N \geq M$, alors

$$\left| \int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x - 2 \right| < 1,$$

donc $1 < \int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$. On utilise cette inégalité dans $(*)$ pour conclure.

Pour terminer l'exercice, on a

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} \left| \sum_{k=N}^{2N} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \geq \sup_{x\in[0,2\pi]} \frac{1}{2N} \left| \sum_{k=N}^{2N} \sin(kx) \right| \geq \frac{N}{2N\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

On voit que ce supremum ne peut pas tendre vers 0 lorsque $N \to \infty$, donc la série ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$. En effet, ceci montre que la suite des sommes partielles $s_n = \sup_{x\in[0,2\pi]} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right|$ n'est pas une suite de Cauchy.

Exercice 14. On suppose qu'il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$. On pose $f(x) = e^{ix}$.

a) « Montrer » que f est une solution de $y'' + y = 0$.

b) Déduire que $f(x) = \cos x + i \sin x$.

Exercice 15. (Polynômes de Tchebychev) Soit

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Montrer que pour tout n, f_n et g_n sont des polynômes.

Exercice 16†. Soit $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b g(x) \cos(\lambda x) \mathrm{d}x = 0.$$

Indice. Faites d'abord un changement de variable $u = x - \frac{\pi}{\lambda}$. Vous aurez ensuite à montrer que $\int_a^b g(x) \sin(x) \mathrm{d}x + \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\big(x + \frac{\pi}{\lambda}\big) \sin(\lambda x) \mathrm{d}x \to 0$ lorsque $\lambda \to \infty$. Vous aurez à utiliser la continuité uniforme de g.

3. tan et arctan

Exercice 17. Montrer que arctan est analytique sur $\mathbb{R}$.

Solution. Si on dérive arctan, on a $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Puisque $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est analytique sur $(-1, \infty)$ et que $g(x) = x^2$ est analytique sur $\mathbb{R}$, il suit que $f \circ g$ est analytique sur $(-1, \infty)$. La primitive d'une fonction analytique est analytique, donc arctan est analytique sur $(-1, \infty)$. Puisque arctan est impaire, il suit qu'elle est analytique sur $(-\infty, 0)$. On conclut que arctan est analytique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. On rappelle que $\sec x := \frac{1}{\cos x}$ là où $\cos x \neq 0$. Vérifier les propriétés suivantes :

a) sec est dérivable et $(\sec x)' = \sec x \tan x$;

b) $(\tan x)' = \sec^2 x$;

c) sec est 2π-péridique;

d) sec est pair;

e) $\sec(0) = 1$;

f) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$;

g) $\int \sec x \mathrm{d}x = \log |\sec x + \tan x| + C$.

Exercice 19. Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on pose $I_n = \int \sec^n x \mathrm{d}x$. Montrer que pour $n \geq 2$, on a

$$I_n = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} - \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

Exercice 20. Montrer que pour $x \neq \frac{1}{y}$, on a

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

4. cosh et sinh

Exercice 21.

a) Montrer que $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est inversible.

b) On note l'inverse de sinh par argsinh. Montrer que $\operatorname{argsinh}(y) = \log\big(y + \sqrt{y^2+1}\big)$.

c) Montrer que

$$\operatorname{argsinh}(y) = \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

d) Résoudre l'intégrale suivante en terme de argsinh :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+4x+10}}.$$

Solution. a) On sait que $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$ et que $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$, donc par le théorème de la valeur intermédiaire, il suit que sinh est surjective. Ensuite, on sait que $\sinh'(x) = \cosh(x) > 0$, donc sinh est strictement croissante. On déduit que sinh est injective.

Conclusion : sinh est bijective et donc inversible.

b) On a

$$\begin{aligned}
z = \operatorname{argsinh}(y) \quad &\Leftrightarrow \quad z = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{x - \frac{1}{x}}{2} \Leftrightarrow && \text{(en posant } x = e^y\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad 2xz = x^2 - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 2xz - 1 \\
&\Rightarrow \quad x_\pm = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2+4}}{2} \\
&\Rightarrow \quad x_+ = z + \sqrt{z^2+1} && \text{(on garde } x_+\text{, car } x = e^y > 0\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad e^y = z + \sqrt{z^2+1}\\
&\Rightarrow \quad y = \log\big(z + \sqrt{z^2+1}\big).
\end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{argsinh}'(y) &= \Big(\log\big(y+\sqrt{y^2+1}\big)\Big)'\\
&= \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}\right)\\
&= \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} \cdot \left(\frac{y+\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{y^2+1}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.
\end{aligned}$$

On a donc que

$$\int_0^y \operatorname{argsinh}'(t)\mathrm{d}t = \operatorname{argsinh}(y) - \operatorname{argsinh}(0).$$

Comme $\sinh(0) = 0$, il suit que $\operatorname{argsinh}(0) = 0$, d'où le résultat.

d) On complète le carré. On a

$$2(x^2+2x)+10 = 2(x^2+2x+1)+8 = 2(x+1)^2+8 = 2\big((x+1)^2+4\big).$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+4x+10}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2+4}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}(x+1)^2+1}} \qquad \Big(t = \tfrac{1}{2}(x+1)\Big)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{argsinh}(t) + C\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{argsinh}\left(\tfrac{1}{2}(x+1)\right) + C
\end{aligned}$$

Exercice 22. On suppose qu'il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$.

a) « Montrer » que $f(x) = \sinh(ix)$ est une solution de $y'' + y = 0$.

b) Déduire que $\sinh(ix) = \frac{\sin(x)}{i}$.

c) Trouver une expression pour $\cosh(ix)$ en terme de $\cos(x)$.

5. Applications

Exercice 23. Soit P_n un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1. Soit r la longueur d'une apothème et c, la longueur d'un côté.

a) Exprimer l'aire du polygone en fonction de r, c et n.

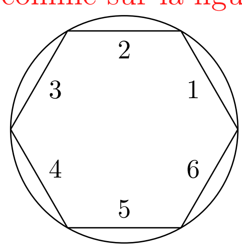
b) Calculer l'aire du cercle à l'aide du a).

Exercice 24. On considère un hexagone inscrit dans un cercle de rayon 1.

a) Montrer que la longueur d'un côté de l'hexagone est strictement plus petit que la longueur de l'arc de cercle qu'il sous-tend.

b) Montrer que $\pi > 3$.

Solution. a) On numérote les côtés comme sur la figure.



La longueur de chaque côté de l'hexagone en question est 1, donc on doit montrer que l'arc de cercle sous-tendu par chaque côté est plus grand que 1. Notons qu'on bien que la figure est symétrique, mais on n'a pas montré que la longueur d'arc était invariante par rotation.

Pour le premier arc, on remarque d'abord, pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, que

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{2}}.$$

Ainsi, la longueur satisfait à

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} 2\sqrt{1-t}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2}} = 1.$$

Pour le second arc, on remarque, pour $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$, que

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geq 1.$$

De plus, l'inégalité est stricte pour au moins un t. Ainsi, on a

$$L_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} > \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\mathrm{d}t = 1.$$

L'inégalité est stricte puisque $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1$ est positive, strictement positive en au moins un point et continue.

Le troisième arc se fait de la même manière que le premier.

Les trois autres arcs sont faits comme pour les trois premiers, puisque c'est le même intégrande. (Le carré du t^2 annule le signe moins.)

b) Puisque $\frac{\pi}{3} \geq 1$ pour les 6 côtés, avec inégalité stricte pour au moins un des côtés, on voit que $2\pi > 6$, d'où $\pi > 3$.

Exercice 25. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(n!)}{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n!}}{(n-1)!}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2)!}{n^n}$

Exercice 26. Calculer les limites suivantes sans utiliser la règle de l'Hôpital.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{x^2}-1}{\sin x}$

b) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}}} n\dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\log n}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\log\bigl(1+\frac{1}{x}\bigr)$

Solution. a) On sait que $e^{x^2} - 1 = x^2 + o(x^2)$ et $\sin x = x + o(x)$, donc on a

$$\frac{e^{x^2}-1}{\sin x} = \frac{x^2+o(x^2)}{x+o(x)} = \frac{x+o(x)}{1+o(1)} \longrightarrow 0$$

lorsque $x \to 0$.

Exercice 27. Montrer que les fonctions suivantes sont *transcendantes*, c'est-à-dire que pour chaque f suivante, montrer que si q_0,..., q_n sont des fonctions rationnelles telles que $q_n(x)f(x)^n + \cdots + q_1(x)f(x) + q_0(x) = 0$, alors $q_j(x) = 0$ pour tout x et tout $0 \leq j \leq n$.

a) $f(x) = \exp(x)$ b) $f(x) = \sin(x)$

Solution. a) Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\left|x^m q_n(x)\right| \to \infty$ lorsque $x \to \infty$. On a

$$\begin{aligned} 0 &= x^m \left|q_n(x)e^{nx} + \cdots + q_1(x)e^x + q_0(x)\right| \\ &= e^{nx}\left|x^m q_n(x) + \cdots + x^m q_1(x)e^{-(n-1)x} + x^m q_0(x)e^{-nx}\right|. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Si on laisse $x \to \infty$, alors $|x^m q_n(x)| \to \infty$ et $x^m q_j(x)e^{-(n-j)x} \to 0$, donc la ligne $(*)$ tend vers ∞, ce qui est impossible, puisque le côté gauche est nul.

Exercice 28[†]. Le but de l'exercice est de montrer que π est irrationnel. On pose

$$I_n = \int_0^\pi \frac{x^n(\pi - x)^n}{n!} \sin x \,\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que $I_0 = 2$, $I_1 = 4$ et que

$$I_n = 2(2n-1)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2} \qquad (n \geq 2).$$

Indice. Intégrez deux fois par partie en commençant avec $u = \frac{x^n(\pi-x)^n}{n!}$ et $v' = \sin x$. Ensuite, posez $J_n = \int_0^\pi \frac{x^{n-1}(\pi-x)^{n-2}}{(n-2)!} \sin x \,\mathrm{d}x$ et montrer que $J_n = \pi I_{n-2} - J_n$ à l'aide du changement de variable $u = \pi - x$ et de petits artifices.

b) Montrer qu'il existe des entiers $c_{j,n}$ ($n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j \leq n$) tels que

$$I_n = c_{n,n}\pi^n + c_{n-1,n}\pi^{n-1} + \cdots + c_{1,n}\pi + c_{0,n}.$$

c) On suppose maintenant par l'absurde que π est rationnel, donc qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\pi = \frac{p}{q}$ et $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$. Argumenter que $q^n I_n$ est un entier strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Montrer que $q^n I_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Déduire que π n'est donc pas rationnel.

e) Expliquer quelle propriété de π est utilisée dans la démarche. (Autrement dit, pourquoi cette démarche ne fonctionne pas si on remplaçait π par un autre nombre, e par exemple.)

Exercices supplémentaires

Cette section est optionnelle.Les exercices de cette section portent sur de la matière d'analyse 1, sauf l'exercice 31, et peuvent donc être tenus comme acquis.

Exercice 29. a) (Sommation par partie) Soit (a_n) et (b_n) deux suites et soit (s_n) la suite des sommes partielles de a_n. Montrer que

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n.$$

b) (Lemme d'Abel) Soit (b_n) une suite décroissante et positive. Soit (a_n) une suite telle qu'il existe M, m tels que

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M$$

pour tout n. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq M b_1.$$

Ensuite, montrer que pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on a

$$|a_k b_k + \cdots + a_n b_n| \leq (M - m) b_k.$$

Solution. a) On a

$$\begin{aligned} s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &= s_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} (s_k b_k - s_{k-1} b_k) \\ &= s_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k. \end{aligned}$$

b) D'abord, on a que

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n &= s_1(b_1 - b_2) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &\leq M(b_1 - b_2) + \cdots + M(b_{n-1} - b_n) + M b_n \quad \text{(car } b_{k-1} - b_k \geq 0) \\ &= M b_1. \end{aligned}$$

Ensuite, on a que

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n &= s_1(b_1 - b_2) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &\geq m(b_1 - b_2) + \cdots + m(b_{n-1} - b_n) + m b_n \quad \text{(car } b_{k-1} - b_k \geq 0) \\ &= m b_1. \end{aligned}$$

Ceci montre la première partie.

Pour la deuxième partie, on constate que pour tout $k \leq n$, on a

$$m - M \leq m - s_{k-1} \leq s_n - s_{k-1} \leq M - s_{k-1} \leq M - m.$$

Ainsi, on voit que pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, on a

$$|a_k + \cdots + a_n| \leq M - m.$$

On applique donc la première partie aux suites $c_n := a_{k-1+n}$ et $d_n := b_{k-1+n}$, ce qui donne

$$(m - M) d_1 \leq c_1 d_1 + \cdots c_{n-k+1} d_{n-k+1} \leq (M - m) d_1,$$

c'est-à-dire

$$(m - M)b_k \leq a_k b_k + \cdots a_n b_n \leq (M - m)b_k.$$

Exercice 30. (Test de Dirichlet) Soit (a_n) une suite dont la suite des sommes partielles est bornée et (b_n) une suite telle que $b_n \downarrow 0$. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

converge.

Exercice 31. (Théorème d'Abel). Soit $\sum a_n$ une série convergente. Montrer que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. (Utilisez le lemme d'Abel pour montrer que si $|a_n + \cdots + a_m| < \varepsilon$, alors $|a_n x^n + \cdots + a_m x^m| < \varepsilon$ pour $x \in [0, 1]$.)

Solution. Comme $\sum a_n$ est convergente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n, m > N$, avec disons $m \geq n$, on a

$$|a_n + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

La suite $b_n = x^n$ est décroissante et positive, donc par le lemme d'Abel, on a

$$|a_n b_n + \cdots + a_m b_m| < b_n \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Comme l'inégalité est vrai pour tout $m \geq n$, on conclut que

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_n x^n \right| < \varepsilon.$$

En prenant le supremum sur $[0, 1]$, on voit que

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_n x^n \right| < \varepsilon,$$

autrement dit, la série converge uniformément.