Analyse 2

Série 5

Fonctions transcendantes

1. exp et log

Exercice 1. On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *convexe* sur I si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \le tf(x) + (1-t)f(y).$$

On dit que f est *concave* si $-f$ est convexe.

a) Montrer que si f est deux fois dérivable et si $f''(x) \ge 0$ sur I, alors f est convexe.

b) Montrer que exp est convexe sur $\mathbb{R}$ et que log est concave sur $(0, \infty)$.

Exercice 2. On tient pour acquis que la composition de fonctions analytiques est encore analytique là où la composition est possible. (Cela se montre sans problème dans un cours d'analyse complexe.) Montrer que les fonctions suivantes sont analytiques, en donnant pour chacune le domaine sur lequel elles sont analytiques.

a) $f(x) = \sqrt{1+x}$

b) $f(x) = x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 3. a) En utilisant les propriétés de exp et log, montrer que

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculer les limites suivantes. (*Suggestion.* Utilisez les petits o, car la règle de l'Hôpital, bien qu'elle fonctionne, occasionne un calcul plus compliqué.)

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n^2+2n-1}\right)^{\frac{1}{n^2}}$ *ii)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right)^{\sqrt{n^2+n}}$

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{b_n}$, où $a_n \to \infty$ et $\frac{b_n}{a_n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 4. Soit
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est dérivable.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que pour $x > 0$
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-\frac{1}{x}}.$$

c) Montrer que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

d) Conclure que f ne peut pas s'exprimer comme série entière en 0 et ce, même si la série de Taylor de f en 0 converge.

Exercice 5. (Inégalité de Grönwall) Soit $f, g\colon [a, b] \to [0, \infty)$ des fonctions positives et continues. Montrer que s'il existe $C \geq 0$ tel que
$$f(x) \leq C + \int_a^x fg \qquad \text{pour tout } x \in [a, b],$$
alors
$$f(x) \leq C \exp\big(\textstyle\int_a^x g\big).$$
Indice. Faites le cas $C > 0$ en posant $h(x) = C + \int_a^x fg$. Montrez le cas $C = 0$ à l'aide d'une suite (C_n) telle que $C_n \downarrow 0$.

Exercice 6. Soit la série
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right).$$

a) Montrer que f converge uniformément vers $\frac{1}{2}\log(x+1)$ sur $[-a, a]$ pour tout $0 < a < 1$.

b) Montrer que $f(1) = \log 2$. (Utiliser le théorème d'Abel, exercice 31.)

Exercice 7. Soit $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(xy) = f(x) + f(y)$. On suppose que $f'(1) > 0$ et on pose $C = e^{\frac{1}{f'(1)}}$.

a) Montrer que $f(1) = 0$.

b) Montrer que $xf'(x) = f'(1)$.

c) Montrer que $f(x) = \frac{\log x}{\log C}$, c'est-à-dire $f(x) = \log_C x$.

2. sin et cos

Exercice 8. Montrer à l'aide de la définition de sinus et de cosinus que

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 9. À l'égard de tou·te·s les physicien·ne·s, donner un sens mathématique le plus proche possible de ce qu'il est entendu par « $\sin x = x$ lorsque x est petit ».

Exercice 10. a) Montrer les identités

$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$
$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b).$$

b) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Calculer

$$\int \cos(ax)\cos(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 11. Montrer que $f(x) = \arcsin(x)$ est analytique sur $(-1,1)$. Déduire que $g(x) = \arccos(x)$ est également analytique sur cet intervalle.

Exercice 12. a) Pour tout k, montrer que

$$\sin\Big((k+\tfrac{1}{2})x\Big) - \sin\Big((k-\tfrac{1}{2})x\Big) = 2\sin(\tfrac{x}{2})\cos(kx).$$

b) En déduire que

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin\Big((n+\frac{1}{2})x\Big)}{2\sin(\frac{x}{2})}.$$

c) En utilisant une technique semblable, montrer également que

$$\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Exercice 13. a) Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \tag{$*$}$$

converge uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(On tient pour acquis le lemme d'Abel, voir l'exercice 29.)

b) Montrer que lorsque $x = \frac{\pi}{N}$, alors

$$\left| \sum_{k=N}^{2N} \sin(kx) \right| = \left| \sum_{k=0}^{N} \sin(kx) \right| \geq \frac{N}{\pi}$$

pour tout N assez grand. Conclure que

$$\sup_{x \in [0,2\pi]} \left| \sum_{k=N}^{2N} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \geq \frac{1}{2\pi}$$

et que la série $(*)$ ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 14. On suppose qu'il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$. On pose $f(x) = e^{ix}$.

a) « Montrer » que f est une solution de $y'' + y = 0$.

b) Déduire que $f(x) = \cos x + i \sin x$.

Exercice 15. (Polynômes de Tchebychev) Soit

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Montrer que pour tout n, f_n et g_n sont des polynômes.

Exercice 16†. Soit $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b g(x) \cos(\lambda x) \mathrm{d}x = 0.$$

Indice. Faites d'abord un changement de variable $u = x - \frac{\pi}{\lambda}$. Vous aurez ensuite à montrer que $\int_a^b g(x) \sin(x) \mathrm{d}x + \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\big(x + \frac{\pi}{\lambda}\big) \sin(\lambda x) \mathrm{d}x \to 0$ lorsque $\lambda \to \infty$. Vous aurez à utiliser la continuité uniforme de g.

3. tan et arctan

Exercice 17. Montrer que arctan est anaylitque sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. On rappelle que $\sec x := \frac{1}{\cos x}$ là où $\cos x \neq 0$. Vérifier les propriétés suivantes :

a) sec est dérivable et $(\sec x)' = \sec x \tan x$;

b) $(\tan x)' = \sec^2 x$;

c) sec est 2π-péridique;

d) sec est pair;

e) $\sec(0) = 1$;

f) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$;

g) $\int \sec x \mathrm{d}x = \log|\sec x + \tan x| + C$.

Exercice 19. Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on pose $I_n = \int \sec^n x \mathrm{d}x$. Montrer que pour $n \geq 2$, on a

$$I_n = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} - \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

Exercice 20. Montrer que pour $x \neq \frac{1}{y}$, on a

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

4. cosh et sinh

Exercice 21.

a) Montrer que $\sinh \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est inversible.

b) On note l'inverse de sinh par argsinh. Montrer que $\operatorname{argsinh}(y) = \log\big(y + \sqrt{y^2+1}\big)$.

c) Montrer que

$$\operatorname{argsinh}(y) = \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

d) Résoudre l'intégrale suivante en terme de argsinh :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+4x+10}}.$$

Exercice 22. On suppose qu'il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$.

a) « Montrer » que $f(x) = \sinh(ix)$ est une solution de $y'' + y = 0$.

b) Déduire que $\sinh(ix) = \frac{\sin(x)}{i}$.

c) Trouver une expression pour $\cosh(ix)$ en terme de $\cos(x)$.

5. Applications

Exercice 23. Soit P_n un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1. Soit r la longueur d'une apothème et c, la longueur d'un côté.

a) Exprimer l'aire du polygone en fonction de r, c et n.

b) Calculer l'aire du cercle à l'aide du a).

Exercice 24. On considère un hexagone inscrit dans un cercle de rayon 1.

a) Montrer que la longueur d'un côté de l'hexagone est strictement plus petit que la longueur de l'arc de cercle qu'il sous-tend.

b) Montrer que $\pi > 3$.

Exercice 25. Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(n-1)!}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2)!}{n^n}$

Exercice 26. Calculer les limites suivantes sans utiliser la règle de l'Hôpital.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x^2}-1}{\sin x}$

b) $\displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}}} n\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\log n}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\log\bigl(1+\tfrac{1}{x}\bigr)$

Exercice 27. Montrer que les fonctions suivantes sont *transcendantes*, c'est-à-dire que pour chaque f suivante, montrer que si $q_0,\ldots, q_n$ sont des fonctions rationnelles telles que $q_n(x)f(x)^n + \cdots + q_1(x)f(x) + q_0(x) = 0$, alors $q_j(x) = 0$ pour tout x et tout $0 \leq j \leq n$.

a) $f(x) = \exp(x)$

b) $f(x) = \sin(x)$

Exercice 28†. Le but de l'exercice est de montrer que π est irrationnel. On pose

$$I_n = \int_0^\pi \frac{x^n(\pi-x)^n}{n!}\sin x\,\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que $I_0 = 2$, $I_1 = 4$ et que

$$I_n = 2(2n-1)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2} \qquad (n \geq 2).$$

Indice. Intégrez deux fois par partie en commençant avec $u = \frac{x^n(\pi-x)^n}{n!}$ et $v' = \sin x$. Ensuite, posez $J_n = \int_0^\pi \frac{x^{n-1}(\pi-x)^{n-2}}{(n-2)!}\sin x\,\mathrm{d}x$ et montrer que $J_n = \pi I_{n-2} - J_n$ à l'aide du changement de variable $u = \pi - x$ et de petits artifices.

b) Montrer qu'il existe des entiers $c_{j,n}$ ($n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j \leq n$) tels que

$$I_n = c_{n,n}\pi^n + c_{n-1,n}\pi^{n-1} + \cdots + c_{1,n}\pi + c_{0,n}.$$

c) On suppose maintenant par l'absurde que π est rationnel, donc qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\pi = \frac{p}{q}$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Argumenter que $q^n I_n$ est un entier strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Montrer que $q^n I_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Déduire que π n'est donc pas rationnel.

e) Expliquer quelle propriété de π est utilisée dans la démarche. (Autrement dit, pourquoi cette démarche ne fonctionne pas si on remplaçait π par un autre nombre, e par exemple.)

Exercices supplémentaires

Cette section est optionnelle.Les exercices de cette section portent sur de la matière d'analyse 1, sauf l'exercice 31, et peuvent donc être tenus comme acquis.

Exercice 29. a) (Sommation par partie) Soit (a_n) et (b_n) deux suites et soit (s_n) la suite des sommes partielles de a_n. Montrer que

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n.$$

b) (Lemme d'Abel) Soit (b_n) une suite décroissante et positive. Soit (a_n) une suite telle qu'il existe M, m tels que

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M$$

pour tout n. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq M b_1.$$

Ensuite, montrer que pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on a

$$|a_k b_k + \cdots + a_n b_n| \leq (M - m) b_k.$$

Exercice 30. (Test de Dirichlet) Soit (a_n) une suite dont la suite des sommes partielles est bornée et (b_n) une suite telle que $b_n \downarrow 0$. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

converge.

Exercice 31. (Théorème d'Abel). Soit $\sum a_n$ une série convergente. Montrer que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. (Utilisez le lemme d'Abel pour montrer que si $|a_n + \cdots + a_m| < \varepsilon$, alors $|a_n x^n + \cdots + a_m x^m| < \varepsilon$ pour $x \in [0, 1]$.)