Analyse 2

Série 4

Séries entières

Exercice 1. Montrer que le rayon de convergence d'une série entière est unique.

Exercice 2. Montrer que le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n x^n$ est donnée par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Solution. On pose

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Cette limite existe ou elle vaut ∞.

Le critère de Cauchy dit que la série $\sum |a_n x^n|$ converge si

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1,$$

c'est-à-dire si

$$|x| < \frac{1}{L}.$$

De plus, cette série diverge si $L > 1$, c'est-à-dire si $|x| > \frac{1}{L}$. On conclut que $R = \frac{1}{L}$. Si $L = \infty$, alors $R = 0$.

Bien que cela ne soit pas nécessaire pour la question, il en vaut peut-être la peine d'en profiter pour rappeler le critère de Cauchy. Si $L < 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $L + \varepsilon < 1$. Il existe $N > 0$ tel que si $n \geq N$, alors

$$\left| \sup_{m\geq n} \sqrt[n]{|a_n|} - L \right| < \varepsilon.$$

Ainsi, on a

$$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \varepsilon < 1$$

pour tout $n \geq N$. On conclut que

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} (L+\varepsilon)^n < \infty,$$

car $L + \varepsilon < 1$. On peut montrer que la série $\sum |a_n|$ diverge si $L > 1$ de la même façon.

Exercice 3. Montrer que la série

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

a pour rayon de convergence $R = \infty$, mais que la série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Trouver une série entière centrée en 0 pour les fonctions suivantes. Déterminer le rayon de convergence.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Solution. a) On rappelle que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

pour $x \in (-1, 1)$. Or, si $x \in (-1, 1)$, il en va de même pour x^2, donc la formule précédente tient avec x^2 et on trouve

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

b) On a simplement

$$\frac{x}{x-1} = (-x) \cdot \frac{1}{1-x} = -x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}.$$

c) On a

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Puisque c'est une série géométrique de rapport $-x$, son rayon de convergence est $R = 1$.

Exercice 5. Soit deux séries entières

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

de rayon de convergence respectif $R > 0$ et $Q > 0$. Montrer que le produit fg est une série entière de rayon de convergence au moins $\min\{R, Q\}$.

Indice. Évoquez le théorème du produit de Cauchy vu en Analyse 1.

Solution. On pose $S = \min\{R, Q\} > 0$ et, pour $|x| < S$, on pose $h(x) = f(x)g(x)$. Pour un tel x, $f(x)$ et $g(x)$ sont absolument convergentes, donc $h(x)$ aussi par le théorème sur le produit de séries. De plus, par la formule du produit de Cauchy on a

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^{n-k} b_k x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right) x^n$$

qui est bien une série entière. Son rayon de convergence est au moins S, puisque h converge absolument pour tout $x \in (-S, S)$.

Exercice 6. Trouver une série entière centrée en 0 pour les fonctions suivantes.

a) $f(x) = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-x}$

b) La solution de $y' = y$, avec $y(0) = 1$. (*Indice*. Supposez qu'il existe une solution de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trouvez les a_n et montrez que la série a un rayon de converge $R > 0$.)

c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$

Solution. a) Si $x \in (-1, 1)$, alors $\frac{x}{t} \in (-1, 1)$ pour quelque soit $t \in (1, 2)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-x} &= \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{t}} \mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 \frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{t}\right)^n \right) \mathrm{d}t && \left(\text{car } \left|\tfrac{x}{t}\right| < 1\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_1^2 \frac{x^n}{t^{n+1}} \mathrm{d}t \right) && \begin{array}{l}\text{(car la série converge}\\ \text{uniformément sur } (1,2),\\ \text{quelque soit } x \in (-1,1))\end{array} \\
&= \log t \Big|_1^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{-nt^n} \Big|_1^2 \\
&= \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).
\end{aligned}$$

Le rayon de convergence est exactement 1, car la série convergence absolument pour $|x| < 1$ (on peut comparer avec $\sum \frac{x^n}{n}$ qui est la dérivée de la série géométrique de rayon de convergence au moins 1) et elle diverge si $|x| > 1$, car le terme général ne tend pas vers 0, dans ce cas.

Voici une autre façon de faire l'exercice. On peut intégrer en premier et utiliser le développement en série de $\log(1-x)$. On a

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-x} = \log(2-x) - \log(1-x).$$

On a

$$\log(2-x) = \log 2 - \log\left(1 - \tfrac{x}{2}\right) = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}.$$

Ensuite, on a

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Pour $|x| < 1$, ces deux séries convergent absolument, donc on peut les combiner. On trouve

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-x} = \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Remarque. La première méthode se généralise mieux, par exemple pour les intégrales complexes en analyse complexe. Pour le cours d'analyse 2, il n'y a pas de différence.

b) Soit $f(x) = \sum a_n x^n$. On suppose pour le moment que c'est une série entière convergente et que c'est une solution de $y' = y$. On a donc

$$f'(x) = f(x) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ainsi, par le principe d'identité, on a

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \\ 2a_2 &= a_1 \\ &\vdots \\ na_n &= a_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Puisque $y(0) = 1$, on doit avoir $a_0 = 1$. Ensuite, on a $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}$, etc. On peut montrer par récurrence (faites-le) que $a_n = \frac{1}{n!}$.

On conclut que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Il est montré au numéro 3 que c'est une série convergente avec un rayon de converge $R = \infty$. Ainsi, il est justifié d'échanger l'ordre de la dérivée et de la série, ce qui veut dire que f est bien une solution de l'équation différentielle.

c) Pour $|x| < 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{4n} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}. \end{aligned}$$

Le rayon de convergen doit être $R = 1$, car pour tout $|x| > 1$, la série diverge, vu que le terme général ne tend pas vers 0, dans ce cas.