Analyse 2

Série 4

Séries entières

Exercice 1. Montrer que le rayon de convergence d'une série entière est unique.

Exercice 2. Montrer que le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n x^n$ est donnée par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Exercice 3. Montrer que la série

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

a pour rayon de convergence $R = \infty$, mais que la série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Trouver une série entière centrée en 0 pour les fonctions suivantes. Déterminer le rayon de convergence.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Exercice 5. Soit deux séries entières

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

de rayon de convergence respectif $R > 0$ et $Q > 0$. Montrer que le produit fg est une série entière de rayon de convergence au moins $\min\{R, Q\}$.
Indice. Évoquez le théorème du produit de Cauchy vu en Analyse 1.

Exercice 6. Trouver une série entière centrée en 0 pour les fonctions suivantes.

a) $f(x) = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-x}$

b) La solution de $y' = y$, avec $y(0) = 1$. (*Indice*. Supposez qu'il existe une solution de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trouvez les a_n et montrez que la série a un rayon de converge $R > 0$.)

c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$