Analyse 2

Série 3

Convergence uniforme (solutionnaire)

1. Convergence simple

Exercice 1. Calculer la limite simple des suites suivantes.

a) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

b) $f_n(x) = x^n e^{-nx}$, $x \in [1, \infty)$

c) $f_n(x) = \tan\left(\frac{x}{n}\right)$

Solution. a) Pour $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{\sin(nx)}{nx}\right| \leq \frac{1}{n|x|},$$

donc la suite tend vers 0. Pour $x = 0$, la suite vaut 1 pour tout n. On a donc $f_n \to f$ simplement sur $\mathbb{R}$, où

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2. Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que si pour tout $x \in I$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$, on a $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, alors il existe $f\colon I \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \to f$ simplement sur I.

Exercice 3. Soit I un intervalle, (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f_n \to f$ simplement sur I.

a) Montrer que si chaque f_n est une fonction croissante sur I, alors f est croissante sur I.

b) Si chaque f_n est strictement croissante, alors f est-elle strictement croissante?

Solution. a) Puisque f_n est croissante, on a pour tout $x, y \in I$, si $x \leq y$, alors $f_n(x) \leq f_n(y)$. Si comme l'inégalité est vraie pour tout n et tout $x \leq y$, on peut laisser $n \to \infty$ et on obtient $f(x) \leq f(y)$.

b) Non. Par exemple $f_n(x) = x^n$ sur $[0, \frac{9}{10}]$ est strictement croissante, mais la limite simple est $f(x) = 0$, qui est croissante, mais pas strictement croissante.

Exercice 4. Soit la suite de fonction

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \big[-1, -\frac{1}{n}\big], \\ \frac{n}{2}x + \frac{1}{2}, & \text{si } x \in \big(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\big], \\ 1, & \text{si } x \in \big(\frac{1}{n}, 1\big]. \end{cases}$$

Soit la suite (x_m) définie par $x_m = \frac{1}{2m}$.

a) Calculer le limite simple de (f_n) sur $[-1, 1]$.

b) Calculer les limites suivantes :

$$i) \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_n(x_m), \qquad ii) \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_m), \qquad iii) \lim_{n\to\infty} f_n(x_n).$$

2. Convergence uniforme

Exercice 5. Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f_n \to f$ uniformément sur I si et seulement s'il existe une suite (a_n) telle que $a_n \to 0$ et

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \qquad \text{pour tout } x \in I.$$

Solution. $\Rightarrow$) On pose $a_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$. Cette suite dépend seulement de n et elle tend vers 0 puisque $f_n \to f$ uniformément sur I.

$\Leftarrow$) Puisqu'on a $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ pour tout $x \in I$, a_n est un majorant de $|f_n(x) - f(x)|$. Il suit que

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n.$$

Comme $a_n \to 0$, par le théorème des deux gendarmes, le côté gauche tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ et donc on conclut que $f_n \to f$ uniformément sur I.

Exercice 6. Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in I$ et pour tout $m, n \geq N$, on a $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, alors il existe $f\colon I \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur I. (Comparer avec l'exercice 2.)

Exercice 7. Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $f\colon I \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur I. Soit (x_m) une suite de I qui converge vers $a \in I$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_n(x_m) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_m) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$$

et que ces limites existent.

Solution. D'abord, on note que f est continue, puisque chaque f_n l'est. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_n(x_m) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$$

et
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x_m) = \lim_{m\to\infty} f(x_m) = f(a).$$
Pour la dernière limite, on a
$$\begin{aligned}|f_n(x_n) - f(a)| &\le |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(a)|\\ &\le \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| + |f(x_n) - f(a)|.\end{aligned}$$
La dernière ligne tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, car $f_n \to f$ uniformément sur I et f est continue en a. Par le théorème des deux gendarmes, on conclut que le côté gauche tend vers 0, c'est-à-dire que $f_n(x_n) \to f(a)$.

Conclusion : les trois limites existent et elles valent $f(a)$.

Remarque. Si on compare avec le numéro 4, on voit qu'il était nécessaire d'utiliser la convergence uniforme pour montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(a)$.

Exercice 8. Calculer la limite simple des suites suivantes. Ensuite, déterminer si la suite converge uniformément.

a) $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ pour $x \in [0, \infty)$.

b) $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ pour $x \in [a, \infty)$, où $a > 0$.

c) $f_n(x) = \sin^n x \cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Solution. a) Pour $x \neq 0$, on a
$$|f_n(x)| \le e^{-nx} \to 0$$
lorsque $n \to \infty$. Pour $x = 0$, on a que $f_n(0) = 0$ pour tout n. Ainsi, $f_n \to 0$ simplement sur $[0, \infty)$.

Ensuite, on anayse la fonction. On a
$$f_n'(x) = -ne^{-nx}\sin(2nx) + 2ne^{-nx}\cos(2nx).$$
Les points critiques $f_n'(x) = 0$ sur $[0, \infty)$ sont donnés par $-ne^{-nx}\sin(2nx) + 2ne^{-nx}\cos(2nx) = 0$, c'est-à-dire $\tan(2nx) = 2$. D'où $f_n'(x) = 0$ si $x = \frac{\arctan 2}{2n}$.

Enfin, il n'est pas nécessaire de vérifier que c'est le maximum, puisqu'on a
$$\begin{aligned}f_n\left(\tfrac{\arctan 2}{2n}\right) &= e^{-n\frac{\arctan 2}{2n}} \sin\left(2n\frac{\arctan 2}{2n}\right)\\ &= e^{\frac{-\arctan 2}{2}} \sin(\arctan 2).\end{aligned}$$
Ainsi, on obtient
$$\sup_{[0,\infty)} |f_n(x)| \ge e^{\frac{-\arctan 2}{2}} \sin(\arctan 2) > 0 \qquad \text{pour tout } n.$$
Conclusion : $\sup_{[0,\infty)} |f_n(x)| \not\to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Remarque. On aurait pu sauver du temps en remarquant que

$$\sup_{[0,\infty)} |f_n(x)| \geq f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = e^{-1}\sin(2) > 0 \qquad \text{pour tout } n.$$

b) On a

$$\sup_{[a,\infty)} |f_n(x)| \leq \frac{1}{(1+a)^n} \to 0$$

lorsque $n \to \infty$, donc $f_n \to 0$ uniformément.

c) On voit que $f_n \to 0$ simplement, puisque $\sin^n x \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pourvu que $\sin x \neq 1$. Si $\sin x = 1$, alors $\cos x = 0$, donc $f_n = 0$ dans ce cas.

Ensuite, on analyse la fonction sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, puisque la fonction est 2π-périodique. On a

$$f_n'(x) = \sin^{n-1} x((n+1)\cos^2 x - 1).$$

Les points critiques sont

$$\begin{aligned}
x_0 &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \\
x_1 &= 2\pi - x_1, \\
x_2 &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \\
x_3 &= 2\pi - x_2, \\
x_4 &= 0, \\
x_5 &= \pi, \\
x_6 &= 2\pi.
\end{aligned}$$

Puisque $f_n(x_4) = f_n(x_5) = f_n(x_6) = 0$, on peut ignorer ces points critiques. Pour les autres, on a

$$f_n(x_0) = f_n(x_2) = -f_n(x_1) = -f_n(x_3) = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ces points sont les maximums ou minimums, donc a on

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = |f_n(x_0)| \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

Exercice 9. Soit (f_n) et (g_n) deux suites qui convergent uniformément respectivement vers f et g sur un intervalle I. On suppose que f et g sont bornées. Montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

Solution. D'abord, on note que

$$f_n g_n - fg = f_n g_n - f_n g + f_n g - fg.$$

Par hypothèse, on a $\sup|f| \leq M_0$ et $\sup|g| \leq M_1$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} |f_n g_n - fg| &= |f_n g_n - f_n g + f_n g - fg| \\ &\leq |f_n||g_n - g| + |g||g - g_n|. \end{aligned}$$

Puisque $f_n \to f$ uniformément et que f est bornée, f_n est bornée par une constante R qui ne dépend pas n. En effet, on a

$$|f_n| \leq |f_n - f| + |f|.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé et un N assez grand, on a

$$|f_n| \leq \varepsilon + M_0$$

pour $n \geq N$. Si $|f_n| \leq R_n$, alors on prend $R = \max\{R_1, R_2, \ldots, R_N, \varepsilon + M_0\}$.

On conclut que

$$\begin{aligned} |f_n g_n - fg| &\leq |f_n||g_n - g| + |g||g - g_n| \\ &\leq R|g_n - g| + M_1|g - g_n|. \end{aligned}$$

Cette dernière ligne tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ indépendamment de x.

Exercice 10. Soit (f_n) une suite de fonctions sur un intervalle I et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f_n \to f$ uniformément sur I. Soit J un intervalle tel que $\operatorname{Im} f_n, \operatorname{Im} f \subseteq J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$. Montrer que si g est uniformément continue sur J, alors la suite $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur I.

Exercice 11. Soit (f_n) une suite de fonctions de $(a, b) \to \mathbb{R}$ uniformément continues. On suppose qu'il existe $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur (a, b). Montrer que f est uniformément continue.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{(a,b)} |f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Puisque f_N est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in (a, b)$, si $|x - y| < \delta$, alors $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

On a donc, pour tout $x, y \in (a, b)$ avec $|x - y| < \delta$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où f est uniformément continue sur (a, b).

3. Convergence uniforme et intégration

Exercice 12. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx), & \text{si } x \in [0, 1/n], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Trouver la limite simple de (f_n).

b) Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$ et $\int_0^1 f$.

c) Déduire que la convergence n'est pas uniforme.

Solution. a) Si $x > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x > \frac{1}{N}$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a $f_n(x) = 0$, d'où $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ pour tout n, donc $f_n(0) \to 0$ aussi.

conclusion : $f_n \to 0$ simplement sur $[0, \infty)$.

b) L'intégrale $\int_0^1 f_n$ est l'aire sous la courbe d'une parabole. On calcule directement

$$\begin{aligned} \int_0^1 &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2x(1-nx)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} \left(n^2x - n^3x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{n^2x^2}{2} - \frac{n^3x^3}{3}\bigg|_0^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Enfin, il clair que $\int_0^1 f = 0$.

c) La convergence n'est pas uniforme sur $[0, a]$ pour aucun $a > 0$, car si elle l'avait été, on aurait que $\int_0^a f_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, mais au b), on a trouvé que $\int_0^{\frac{1}{n}} f_n = \frac{1}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = 1 - \frac{1}{e} \qquad (*)$$

en suivant ces étapes. On pose $f_n(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

a) Montrer que $f_n^{(j)}(0) \geq 0$ pour $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ et calculer $f_n^{(n)}(x)$.

b) Montrer successivement que $f_n^{(n-1)}$ est croissante, $f_n^{(n-2)}$ est croissante, …, f_n' est croissante et donc que f_n est croissante.

c) Déduire[1] que $f_n \to 0$ uniformément sur $[0,1]$ et donc que $\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \to e^{-x}$ uniformément sur $[0,1]$.
Indice. Pensez à utiliser l'exercice 10.

d) Montrer $(*)$.

Solution. c) On sait que $f_n(0) = 0$ et que f_n est croissante, donc $|f_n|$ atteint son maximum en $x = 1$ sur l'intervalle $[0,1]$. On a donc

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = f_n(1) = e - \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \longrightarrow 0$$

lorsque $n \to \infty$. D'où $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ uniformément sur $[0,1]$.

On pose maintenant $g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et $g(x) = e^x$. Par ce qui précède, on a que $g_n \to g$ uniformément sur $[0,1]$. De plus, remarquons que $g_n(x), g(x) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, donc $\mathrm{Im}(g_n), \mathrm{Im}(g) \subseteq [1,\infty)$.

Ensuite, on définit $h\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$ par $h(x) = \frac{1}{x}$. Cette fonction est uniformément continue, puisque par le théorème des accroissements finis, pour tout $x, y \in [1,\infty)$, il existe ξ entre x et y tel que

$$|h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{\xi^2}|x - y| \leq |x - y|.$$

L'inégalité $|h(x) - h(x)| \leq |x - y|$ tient pour tout $x, y \in [1,\infty)$, donc il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$ dans la définition de continuité uniforme pour conclure que h est bien uniformément continue.

Enfin, on a $\mathrm{Im}(g_n), \mathrm{Im}(g) \subseteq [1,\infty) = \mathrm{dom}(h)$, donc, par le numéro 10, on a que $h \circ g_n \to h \circ g$ uniformément sur $[0,1]$. Autrement dit, on a montré que $\frac{1}{g_n} \to \frac{1}{g}$ uniformément sur $[0,1]$, comme voulu.

Exercice 14. Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\tan x)^n \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_2^A \frac{\mathrm{d}y}{1+y^n}$, avec $2 < A < \infty$

Solution. b) On voit que pour $y \in [2,A]$,

$$\left|\frac{1}{1+y^n}\right| \leq \left|\frac{1}{1+2^n}\right| \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Ainsi, $\frac{1}{1+y^n} \to 0$ uniformément sur $[2,A]$.

Par le théorème sur la convergence uniforme et l'intégrale, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^A \frac{\mathrm{d}y}{1+y^n} = \int_2^A 0\mathrm{d}y = 0.$$

[1] On tient pour acquis que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ lorsque $n \to \infty$, puisque cela est sensé être vu en analyse 1.

Optionnel. Ici, on peut même voir que l'intégrale impropre lorsque $A \to \infty$ est nulle. En effet, on a pour $y \in [2, \infty)$ et $n \geq 2$

$$\frac{1}{1+y^n} \leq \frac{1}{1+y^2 2^{n-2}}.$$

Ensuite, on voit que

$$\int_2^A \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2 2^{n-2}} = \left.\frac{\arctan(\sqrt{2^{n-2}}\, y)}{\sqrt{2^{n-2}}}\right|_2^A.$$

Si on laisse $A \to \infty$, on obtient

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y^n} \leq \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{2^{n-2}}\, 2)}{\sqrt{2^{n-2}}}.$$

Enfin, si on laisse $n \to \infty$, on trouve que

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y^n} = 0.$$

Attention! On ne peut pas utiliser le théorème vu en classe pour échanger la limite lorsque $n \to \infty$ et l'intégrale impropre. En effet, le théorème ne fonctionne que pour une intégrale de Riemann normale (sur un intervalle compact). En fait, la difficulté ici est d'échanger deux limites : $\lim\limits_{A\to\infty}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}$, ce qui est toujours un processus délicat en analyse et même souvent faux.

Exercice 15. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b] \to \mathbb{R}$. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f_n \to f$ simplement sur $[a, b]$ et $f_n' \to f'$ uniformément sur $[a, b]$. Montrer que $f_n \to f$ uniformément sur $[a, b]$.

Solution. Puisque f_n et f sont des primitives de f_n' et f' respectivement, par le numéro 1 du devoir 1, on a $f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'$ et $f(x) - f(a) = \int_a^x f'$. Ainsi, il suit que

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_a^x f_n' - \int_a^x f + f_n(a) - f(a) \right| \\
&\leq \int_a^x |f_n' - f'| + |f_n(a) - f(a)| \\
&\leq \int_a^b |f_n' - f'| + |f_n(a) - f(a)| \\
&\longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty,
\end{aligned}$$

puisque $f_n' \to f'$ uniformément sur $[a, b]$ et $f_n(a) \to f(a)$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 16[†]. Soit $f\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction telle qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq C\big(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|\big)$.

a) Montrer que $y \mapsto f(x,y)$ est continue pour tout $x \in [a,b]$ (et donc intégrable).

b) On pose $F(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$. Montrer que F est continue.

Solution. a) On a simplement

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq C|y_2 - y_1|.$$

Lorsque $y_2 \to y_1$, on voit que $f(x,y_2) \to f(x,y_1)$, d'où $f(x,\cdot)$ est continue en $y = y_1$. Comme y_1 et x sont arbitraires, on en déduit le résultat.

b) On a

$$\begin{aligned}
|F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_c^d f(x+h,y)\mathrm{d}y - \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \int_c^d |f(x+h,y) - f(x,y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq \int_c^d C|x+h-x|\,\mathrm{d}y \\
&= h(d-c).
\end{aligned}$$

Lorsque $h \to 0$, on voit que $F(x+h) \to F(x)$, comme voulu.

4. Convergence uniforme et dérivation

Exercice 17. Pour les suites suivantes, déterminer si chacune converge uniformément et si la suite de ses dérivées converge uniformément sur l'intervalle indiqué.

a) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ sur $\mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)}{n}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ sur $[-1,1]$

c) $f_n(x) = \begin{cases} nx(1-nx), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}], \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x > \frac{1}{2n}, \end{cases}$ sur $[a,1]$, où $0 < a < 1$

Solution. a) Il est clair que $f_n \to f(x) := |x|$ simplement sur $\mathbb{R}$. Ensuite, on pose $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|$. On voit que g_n est paire, donc on peut analyser la fonction sur $[0,\infty)$. En $x = 0$, elle n'est pas dérivable. Pour $x > 0$, on a

$$g_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - 1 < 0$$

pour tout $x \in (0,\infty)$. Ainsi, g_n atteint son maximum en $x = 0$. On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n - f| = g_n(0) = \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. On conclut que $f_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

Puisque f n'est pas dérivable en 0, il est impossible que $f_n' \to f'$ uniformément sur $\mathbb{R}$. (On peut montrer que $f_n' \to f'$ simplement sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, mais ce n'est pas ce que demande la question.)

b) Il est clair que $|f_n(x)| \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in [-1,1]$. Ainsi, il suit que $f_n \to 0$ uniformément sur $[-1,1]$.

Ensuite, pour $x \neq 0$, on a

$$f_n'(x) = \frac{2x \sin\left(\frac{1}{nx}\right)}{n} - \frac{\cos\left(\frac{1}{nx}\right)}{n^2}.$$

Pour $x = 0$, on a

$$f_n'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)}{h} = 0.$$

Ainsi, on voit que $|f_n'(x)| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ pour tout $x \in [-1,1]$. On conclut que $f_n' \to 0$ uniformément sur $[-1,1]$.

On remarque ici que f_n' n'est pas continue en 0, mais elle converge quand même uniformément vers $f'(x) = 0$, qui elle, est continue.

Exercice 18. Soit $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x}$ définie sur $[0,1]$.

a) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f dérivable.

b) Montrer que (f_n') converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g et que $g \neq f'$.

Exercice 19. Refaire le numéro 15 en utilisant le théorème des accroissements finis.

Exercice 20. Soit I, J deux intervalles fermés. Soit (f_n) une suites de fonctions dérivables de $I \to J$. Soit $f\colon I \to J$ une fonction dérivable telle que $f_n \to f$ simplement sur I et $f_n' \to f'$ uniformément sur I. Montrer que si $g\colon J \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, dérivable et si g' est uniformément continue sur J, alors $(g \circ f_n)' \to (g \circ f)'$ uniformément sur I.

Exercice 21. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ et avec f_n' continue. Montrer que si $f_n \to f$ simplement sur $\mathbb{R}$ et si pour tout compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$, il existe $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $f_n' \to g$ uniformément sur $[a,b]$, alors f' existe et $f_n'(x) \to f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution. Si g_1 est la limite f_n' sur $[a,b]$ et g_2 est la limite de f_n' sur $[c,d]$, alors sur $[a,b] \cap [c,d]$, on doit avoir $g_1 = g_2$, car la limite est unique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le théorème de dérivation et convergence uniforme montre que f est dérivable en x. De plus, le paragraphe précédent montre que $f'(x)$ est bien définie. Ainsi, pour tout x, $f'(x)$ existe.

5. Convergence uniforme et séries

Exercice 22. On pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

pour $x \in (-1, 1)$.

a) Calculer

$$\lim_{x \to -1} f(x).$$

b) Est-ce que $f(-1)$ converge? Ceci est un exemple où l'on ne peut pas échanger la limite avec la série.

Exercice 23. Montrer que

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} \mathrm{d}x \right) = 0.$$

Solution. Pour chaque n, on a

$$\left| \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} \right| \leq \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

On pose donc $M_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$. Par le critère de Weierstrass, puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la série de départ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Puisque $\int_0^{\pi} \cos(2nx)\mathrm{d}x = 0$. On conclut que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} \mathrm{d}x \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Exercice 24. Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}.$$

a) Montrer que la série de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'elle ne converge pas absolument.

Solution. a) On pose

$$f_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}.$$

On a
$$|f_m(x) - f(x)| = \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}\right| = \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m-1}}{n+x^2}\right|.$$
Ensuite, en regroupant les termes deux à deux, on voit que
$$\begin{aligned}\frac{1}{m+2k+1+x^2} - \frac{1}{m+2k+2+x^2} \\ &= \frac{1}{(m+2k+1+x^2)(m+2k+2+x^2)} \\ &\leq \frac{1}{(m+2k+1)(m+2k+2)} \\ &\leq \frac{1}{(m+2k)^2} \\ &\leq \frac{1}{(m+k)^2}.\end{aligned}$$
Ainsi, on a
$$\sup_{\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+k)^2} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$
Comme cette dernière série est convergente, lorsque $m \to \infty$, elle tend vers 0. On a donc que $f_m \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) Pour chaque $x \geq 1$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < 2\lfloor x \rfloor$. Ainsi, on a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4\lfloor x \rfloor^2} = \sum_{n=4\lfloor x \rfloor^2}^{\infty} \frac{1}{n}$$
et cette dernière diverge. Les autres valeurs de x se font de la même façon.

Exercice 25. Montrer que $f'(x)$ existe pour tout x, où f est la série de l'exercice précédent.

Exercice 26. Soit la série
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2}.$$

a) Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la série converge uniformément sur $[0, R]$ pour tout $R > 0$.

c) Montrer que $f'(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution. b) Sur $[0, R]$, on a
$$\frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{R}{n^2},$$
donc on pose $M_n = \frac{R}{n^2}$. Par le critère de Weierstrass, on a conclut que la série converge uniformément.

c) La dérivée du terme général est

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{n^2+x^2} &= \frac{(n^2+x^2)-x(2x)}{(n^2+x^2)^2} \\
&= \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} \\
&\leq \frac{n^2-0}{(n^2+0^2)^2} \\
&= \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

On utilise le critière de Weierstrass avec $M_n = \frac{1}{n^2}$ pour conclure que la série $\sum\left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. De plus, on voit que les sommes partielles de cette série sont continues. On conclut que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice supplémentaire

Cette section est optionnelle.

Exercice 27. Soit $f_n(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}}$ sur l'intervalle $(0,1]$. Montrer que f_n convergence simplement vers $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $(0,1]$, mais que la convergence n'est pas uniforme.

Dans l'exercice précédent, la suite (f_n) converge simplement vers une limite f qui est continue, même si la convergence n'est pas uniforme. Cela n'est pas un hasard! En fait, la convergence uniforme est trop forte lorsqu'il est question de continuité ponctuelle. On introduit donc un type de convergence plus forte que la convergence simple, mais plus faible que la convergence uniforme.

Définition. Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions définies sur I. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que (f_n) *converge uniformément localement* vers f sur I si pour tout compact $K \subset I$, on a que $f_n \to f$ uniformément sur K.

Exercice 28. Montrer que si une suite (f_n) converge vers f uniformément localement sur I et si chaque f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.

Exercice 29. Montrer que $f_n(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}}$ converge uniformément localement sur $(0,1]$ vers $f(x) = \frac{1}{x}$.