Analyse 2

Série 3

Convergence uniforme

1. Convergence simple

Exercice 1. Calculer la limite simple des suites suivantes.

a) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

b) $f_n(x) = x^n e^{-nx}$, $x \in [1, \infty)$

c) $f_n(x) = \tan\left(\frac{x}{n}\right)$

Exercice 2. Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que si pour tout $x \in I$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$, on a $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, alors il existe $f \colon I \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \to f$ simplement sur I.

Exercice 3. Soit I un intervalle, (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f_n \to f$ simplement sur I.

a) Montrer que si chaque f_n est une fonction croissante sur I, alors f est croissante sur I.

b) Si chaque f_n est strictement croissante, alors f est-elle strictement croissante?

Exercice 4. Soit la suite de fonction

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right], \\ \frac{n}{2}x + \frac{1}{2}, & \text{si } x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ 1, & \text{si } x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Soit la suite (x_m) définie par $x_m = \frac{1}{2m}$.

a) Calculer le limite simple de (f_n) sur $[-1, 1]$.

b) Calculer les limites suivantes :

$$i)\ \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_n(x_m), \qquad ii)\ \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_m), \qquad iii)\ \lim_{n\to\infty} f_n(x_n).$$

2. Convergence uniforme

Exercice 5. Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f_n \to f$ uniformément sur I si et seulement s'il existe une suite (a_n) telle que $a_n \to 0$ et

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \qquad \text{pour tout } x \in I.$$

Exercice 6. Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in I$ et pour tout $m, n \geq N$, on a $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, alors il existe $f \colon I \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur I. (Comparer avec l'exercice 2.)

Exercice 7. Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $f \colon I \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur I. Soit (x_m) une suite de I qui converge vers $a \in I$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_n(x_m) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_m) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$$

et que ces limites existent.

Exercice 8. Calculer la limite simple des suites suivantes. Ensuite, déterminer si la suite converge uniformément.

a) $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ pour $x \in [0, \infty)$.

b) $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ pour $x \in [a, \infty)$, où $a > 0$.

c) $f_n(x) = \sin^n x \cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit (f_n) et (g_n) deux suites qui convergent uniformément respectivement vers f et g sur un intervalle I. On suppose que f et g sont bornées. Montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

Exercice 10. Soit (f_n) une suite de fonctions sur un intervalle I et soit $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f_n \to f$ uniformément sur I. Soit J un intervalle tel que $\operatorname{Im} f_n, \operatorname{Im} f \subseteq J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $g \colon J \to \mathbb{R}$. Montrer que si g est uniformément continue sur J, alors la suite $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur I.

Exercice 11. Soit (f_n) une suite de fonctions de $(a, b) \to \mathbb{R}$ uniformément continues. On suppose qu'il existe $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur (a, b). Montrer que f est uniformément continue.

3. Convergence uniforme et intégration

Exercice 12. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx), & \text{si } x \in [0, 1/n], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Trouver la limite simple de (f_n).

b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$ et $\int_0^1 f$.

c) Déduire que la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 13. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = 1-\frac{1}{e} \tag{$*$}$$

en suivant ces étapes. On pose $f_n(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

a) Montrer que $f_n^{(j)}(0) \geq 0$ pour $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ et calculer $f_n^{(n)}(x)$.

b) Montrer successivement que $f_n^{(n-1)}$ est croissante, $f_n^{(n-2)}$ est croissante, …, f_n' est croissante et donc que f_n est croissante.

c) Déduire[1] que $f_n \to 0$ uniformément sur $[0,1]$ et donc que $\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \to e^{-x}$ uniformément sur $[0,1]$.
Indice. Pensez à utiliser l'exercice 10.

d) Montrer $(*)$.

Exercice 14. Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\tan x)^n \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_2^{A} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^n}$, avec $2 < A < \infty$

Exercice 15. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a,b] \to \mathbb{R}$. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f_n \to f$ simplement sur $[a,b]$ et $f_n' \to f'$ uniformément sur $[a,b]$. Montrer que $f_n \to f$ uniformément sur $[a,b]$.

Exercice 16†. Soit $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction telle qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq C\big(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|\big)$.

a) Montrer que $y \mapsto f(x,y)$ est continue pour tout $x \in [a,b]$ (et donc intégrable).

b) On pose $F(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$. Montrer que F est continue.

4. Convergence uniforme et dérivation

Exercice 17. Pour les suites suivantes, déterminer si chacune converge uniformément et si la suite de ses dérivées converge uniformément sur l'intervalle indiqué.

a) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ sur $\mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)}{n}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ sur $[-1,1]$

c) $f_n(x) = \begin{cases} nx(1-nx), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}], \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x > \frac{1}{2n}, \end{cases}$ sur $[a,1]$, où $0 < a < 1$

Exercice 18. Soit $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x}$ définie sur $[0,1]$.

a) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f dérivable.

b) Montrer que (f_n') converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g et que $g \neq f'$.

[1] On tient pour acquis que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ lorsque $n \to \infty$, puisque cela est sensé être vu en analyse 1.

Exercice 19. Refaire le numéro 15 en utilisant le théorème des accroissements finis.

Exercice 20. Soit I, J deux intervalles fermés. Soit (f_n) une suites de fonctions dérivables de $I \to J$. Soit $f\colon I \to J$ une fonction dérivable telle que $f_n \to f$ simplement sur I et $f_n' \to f'$ uniformément sur I. Montrer que si $g\colon J \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, dérivable et si g' est uniformément continue sur J, alors $(g \circ f_n)' \to (g \circ f)'$ uniformément sur I.

Exercice 21. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ et avec f_n' continue. Montrer que si $f_n \to f$ simplement sur $\mathbb{R}$ et si pour tout compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$, il existe $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $f_n' \to g$ uniformément sur $[a,b]$, alors f' existe et $f_n'(x) \to f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. Convergence uniforme et séries

Exercice 22. On pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

pour $x \in (-1,1)$.

a) Calculer

$$\lim_{x \to -1} f(x).$$

b) Est-ce que $f(-1)$ converge? Ceci est un exemple où l'on ne peut pas échanger la limite avec la série.

Exercice 23. Montrer que

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} \mathrm{d}x \right) = 0.$$

Exercice 24. Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}.$$

a) Montrer que la série de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'elle ne converge pas absolument.

Exercice 25. Montrer que $f'(x)$ existe pour tout x, où f est la série de l'exercice précédent.

Exercice 26. Soit la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

a) Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la série converge uniformément sur $[0, R]$ pour tout $R > 0$.

c) Montrer que $f'(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice supplémentaire

Cette section est optionnelle.

Exercice 27. Soit $f_n(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}}$ sur l'intervalle $(0, 1]$. Montrer que f_n convergence simplement vers $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $(0, 1]$, mais que la convergence n'est pas uniforme.

Dans l'exercice précédent, la suite (f_n) converge simplement vers une limite f qui est continue, même si la convergence n'est pas uniforme. Cela n'est pas un hasard! En fait, la convergence uniforme est trop forte lorsqu'il est question de continuité ponctuelle. On introduit donc un type de convergence plus forte que la convergence simple, mais plus faible que la convergence uniforme.

Définition. Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions définies sur I. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que (f_n) *converge uniformément localement* vers f sur I si pour tout compact $K \subset I$, on a que $f_n \to f$ uniformément sur K.

Exercice 28. Montrer que si une suite (f_n) converge vers f uniformément localement sur I et si chaque f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.

Exercice 29. Montrer que $f_n(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}}$ converge uniformément localement sur $(0, 1]$ vers $f(x) = \frac{1}{x}$.