Analyse 2

Série 2

Intégration (solutionnaire)

1. Définition de l'intégrale de Riemann

Exercice 1. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit (P_n) une suite de partitions de $[a,b]$. Montrer que s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $I(f,P_n) \to L$ et $S(f,P_n) \to L$ lorsque $n \to \infty$, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f = L$.

Exercice 2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe une suite de partitions (P_n) de $[a,b]$ telle que $S(f,P_n) - I(f,P_n) \to 0$.

a) On pose $Q_n = P_1 \cup \cdots \cup P_n$. Montrer que Q_n est une partition de $[a,b]$ et que la suite $\big(I(f,Q_n)\big)$ converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to \infty$.

b) Montrer que $S(f,Q_n) - I(f,Q_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

c) Montrer que f est intégrable et que $\int_a^b f = L$.

Exercice 3. À l'aide de l'exercice 1, montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur l'intervalle $I = [a,b]$ indiqué en utilisant la suite de partitions donnée par $P_n = \{a, a+\Delta x, a+2\Delta x, \ldots, a+(n-1)\Delta x, b\}$, où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

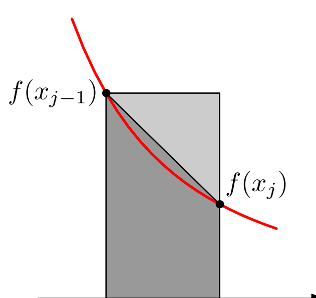
a) $f(x) = x$ sur $[1,2]$ $\qquad$ $f(x) = x^2+1$ sur $[0,1]$

c)† $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[1,2]$

Solution. c) On note les éléments de P_n par $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. On pose aussi $m_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f$ et $M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f$. Puisque f est décroissante, il suit que $m_j = f(x_j)$ et $M_j = f(x_{j-1})$.

On peut séparer l'aire du rectangle $M_j(x_j - x_{j-1})$ en deux parties comme sur la figure :

$$\begin{aligned} M_j(x_j - x_{j-1}) &= f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\big(f(x_{j-1}) + f(x_j)\big)(x_j - x_{j-1})}_{\text{aire du trapèze}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}\big(f(x_{j-1}) - f(x_j)\big)(x_j - x_{j-1})}_{\text{aire du triangle}} \end{aligned}$$



Division d'un rectangle en un trapèze et en un rectangle

Regardons à l'aire du triangle. Par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_{j-1} \in (x_{j-1}, x_j)$ telle que

$$\begin{aligned}\big(f(x_{j-1}) - f(x_j)\big)(x_j - x_{j-1}) &= -f'(\xi_{j-1})(x_j - x_{j-1})^2 \\ &= \frac{2}{\xi_{j-1}^3}(x_j - x_{j-1})^2 \\ &\leq 2(x_j - x_{j-1})^2.\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$M_j(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{1}{2}\big(f(x_{j-1}) + f(x_j)\big)(x_j - x_{j-1}) + 2(x_j - x_{j-1})^2.$$

En réarrangeant (et en se rappelant que $M_j = f(x_{j-1})$ et $m_j = f(x_j)$), on trouve

$$M_j(x_j - x_{j-1}) \leq m_j(x_j - x_{j-1}) + 2(x_j - x_{j-1})^2.$$

Maintenant, on utilise l'équation $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n}$ et on prend la somme de $j = 1$ à n :

$$S(f, P) \leq I(f, P) + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} = I(f, P) + \frac{2}{n}.$$

Ceci montre que $0 \leq S(f, P) - I(f, P) \leq \frac{2}{n} \to 0$ lorsque $n \to 0$. Par le numéro 2, $I(f, P)$ converge vers une valeur $L \in \mathbb{R}$ et par le numéro 1, f est intégrable et $\int_1^2 f = L$.

Remarque. Malheureusement, cette approche ne permet par de *calculer* la valeur de l'intégrale, seulement de montrer que f est intégrable.

Exercice 4. Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables à l'aide de la définition.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $(0, 1]$

b) $f(x) = x + 2$ sur $[1, 2]$

c) $f(x) = 0$ sur $[0, \infty)$

d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \end{cases}$ sur $[0, 1]$

2. Propriétés de l'intégrale

Exercice 5. Montrer les propriétés suivantes de l'intégrale.

a) Si f est bornée sur $[a, b]$, alors pour tout $c \in [a, b]$, on a

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f.$$

b) Si f est intégrable sur $[a,b]$ et si $c \in \mathbb{R}$, alors cf est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b cf = c\left(\int_a^b f\right).$$

c) Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Exercice 6. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Montrer que $|f|$ est intégrable.

b) Montrer que f^2 est intégrable (f au carré).
Suggestion. Montrez d'abord qu'il existe $R \geq 0$ tel que $M_j^2 - m_j^2 \leq R(M_j - m_j)$, où $M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f$ et $m_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f$. Vous devrez également montrer que $\sup_A(f^2) = \left(\sup_A f\right)^2$, (et de même pour inf), en général.

Exercice 7. (Inégalité de Schwarz)

a) Soit le polynôme de degré deux $p(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Montrer que si $p(x) \geq 0$ pour tout x, alors son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif ou nul.

Solution. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $\Delta > 0$. On pose

$$x_0 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a donc

$$p(x_0) = 0$$
$$p'(x_0) = \sqrt{\Delta}.$$

Ainsi, x_0 n'est pas un minimum local, donc il existe forcément un y tel que $p(y) < p(x_0) = 0$, ce qui est une contradiction.

b) Soit $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Montrer que

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

Indice. Poser le polynôme $p(\lambda) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 \mathrm{d}t$.

Solution. On suppose que $\int_a^b g^2 \neq 0$. On considère

$$p(\lambda) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 \mathrm{d}t = \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b (fg) + \lambda^2 \int_a^b g^2.$$

Il est clair que $p(\lambda) \geq 0$ pour tout λ. Ainsi, par le a), on a
$$0 \geq \Delta = 4\Big(\int_a^b fg\Big)^2 - 4\int_a^b f^2 \int_a^b g^2.$$

Si $\int_a^b g^2 = 0$, alors on a $p(\lambda) = \lambda \int_a^b fg + \int_a^b f^2 \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui est seulement possible si $\int_a^b fg = 0$.

Exercice 8. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_a^b f^2 = 0$, alors $f \equiv 0$ (c'est-à-dire $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$). Montrer que si f est seulement intégrable, alors l'énoncé est faux.

Solution. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe x_0 tel que, sans perte de généralité, $f(x_0) > 0$. Puisque f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ (exercice d'analyse 1). On a ainsi
$$\int_a^b f^2 \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2 > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} 0 = 0,$$
ce qui est une contracdiction.

Si f n'est pas continue, il suffit de prendre la fonction
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0; \\ 1, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$
sur l'intervalle $[-1,1]$.

Exercice 9. Donner une exemple d'une fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ non intégrable, mais telle que $|f|$ est intégrable.

Solution. Il suffit de prendre
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$
On voit que $|f(x)| = 1$ pour tout x.

Exercice 10. (Théorème de la moyenne) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Soit m le minimum de f et M, son maximum. Montrer que
$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M.$$

b) Déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

3. Théorème fondamental du calcul

Exercice 11. Soit h une fonction continue et intégrable et soit f, g deux fonctions bornées et dérivables. Calculer la dérivée de

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\mathrm{d}t.$$

Solution. On pose $G(x) = \int_a^x h$. Par le TFC1, G est dérivable. De plus, comme f et g sont dérivables, il suit que $G \circ f$ et $G \circ g$ sont dérivables. On a alors que

$$F(x) = G(f(x)) - G(g(x))$$

est dérivable, donc par la dérivation en chaîne, on a

$$F'(x) = G'(f(x))f'(x) - G'(g(x))g'(x) = h(f(x))f'(x) - h(g(x))g'(x).$$

Exercice 12. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) := \int_a^x f$.

a) Montrer que F est continue sur $[a, b]$.
Remarque. Une fonction intégrable au sens de Riemann est nécessairement bornée.

b) La *fonction de Heaviside* est la fonction

$$H(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer qu'il n'existe aucune fonction intégrable $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $H(x) = \int_{-1}^x f$.

c) Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, on a $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$.

d) Montrer qu'il n'existe aucune fonction intégrable $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $\sqrt{x} = \int_0^x f$.

Exercice 13. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) := \int_a^x f$. Montrer que si f est continue en $y \in [a, b]$, alors F est dérivable en y.

Exercice 14. Soit $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On admet qu'alors l'intégrale de f peut s'écrire comme une somme de Riemann de la forme

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right).$$

Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}$ b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} e^{k/n}$ c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

d) Trouver une fonction $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ qui est n'est pas intégrable, mais dont la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\tfrac{j}{n}\right)$$

converge.

Solution. d) Il suffit de prendre

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\\ 1, & \text{si } x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Exercice 15. a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n+1}\le\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\le\frac{1}{n}$$

et, pour $n\ge 2$,

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}\le\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}\le 1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n-1}.$$

Solution. a) On pose $g(x)=\frac{1}{x}$. On prend la partition $P=\{n,n+1\}$ de l'intervalle $[n,n+1]$. On a alors

$$I(g,P)\le\int_n^{n+1}g\le S(g,P).$$

D'une part, on a

$$I(g,P)=\inf_{[n,n+1]}g=\frac{1}{n+1}.$$

D'autre part, on a

$$S(g,P)=\sup_{[n,n+1]}g=\frac{1}{n}.$$

L'inégalité s'ensuit.

La deuxième inégalité découle de la première en écrivant

$$\int_1^n g=\sum_{j=1}^{n-1}\int_j^{j+1}g.$$

b) On pose $f(x)=\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}$. Montrer que la suite (u_n) de terme général

$$u_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}-f(n)$$

converge. Que pouvez-vous dire sur la valeur de la limite?

Solution. Par le a), on sait que $\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$, donc la suite est bornée. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= f(n+1) - f(n) - \frac{1}{n+1} \\ &= f'(\xi)(n+1-n) - \frac{1}{n+1} && \text{par le thm. des acc. finis} \\ &= \frac{1}{\xi} - \frac{1}{n+1} && \text{par le TFC1} \\ &\geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} && \text{car } \xi \in (n, n+1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La suite est donc décroissante. Une suite minorée et décroissante converge, donc (u_n) converge. De plus, puisque $\frac{1}{n} \leq u_n$, on sait que la limite est positive.

Il est possible d'approximer la limite davantage, bien que ce ne soit pas la méthode la plus efficace. Soit γ la limite de la suite. Comme la suite est décroissante, on sait que $0 \leq \gamma \leq u_n$ pour tout n. On peut approcher la valeur de u_2 comme suit. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $P = \{1, 1+\frac{1}{m}, \ldots, 1+\frac{m-1}{m}, 2\}$ une subdivision de $[1,2]$. On a

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &\geq I(f, P) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \inf_{[1+\frac{j-1}{m}, 1+\frac{j}{m}]} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{j}{m} - 1 - \frac{j-1}{m}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{1+\frac{j}{m}} \frac{1}{m} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{m}{m+j} \frac{1}{m} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m+j}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$u_2 = 1 + \frac{1}{2} - f(2) \leq \frac{3}{2} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m+j}.$$

Pour $m = 2$, on trouve $u_2 \leq \frac{11}{12}$ et pour $m = 3$, $u_2 \leq \frac{53}{60}$. Bref, on conclut que

$$0 \leq \gamma \leq u_2 \leq \frac{53}{60}.$$

On peut ainsi obtenir des approximations de plus en plus fines des u_n. Cependant, d'autres méthodes plus performantes sont utilisées pour s'approcher de γ, puisque la suite (u_n) converge vers γ plutôt lentement.

4. Techniques d'intégration

Exercice 16. Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\cot\mathrm{an}(3t)}$

b) $\displaystyle\int \log x \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

d) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2 t + 3\cos^2 t}$

f) $\displaystyle\int x \arctan x \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3}$

Solution. c) On complète le carré. On a

$$\begin{aligned}
2-3x-4x^2 &= -4(x^2+\tfrac{3}{4}x)+2 \\
&= -4(x^2+\tfrac{3}{4}x+\tfrac{9}{64})+2+\frac{9}{16} \\
&= -4(x+\tfrac{3}{8})^2+\frac{41}{16} \\
&= 4\Big(\frac{41}{64}-(x+\tfrac{3}{8})^2\Big).
\end{aligned}$$

On vise à obtenir un arcsin. On a

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x-4x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{\frac{41}{61}-(x+\frac{3}{8})^2}} & u = x+\tfrac{3}{8} \\
& & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\frac{\sqrt{41}}{8}\sqrt{1-\frac{64}{41}u^2}} \\
&= \frac{8}{2\sqrt{41}}\int \frac{8}{\sqrt{41}}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}} & v = \tfrac{8}{\sqrt{41}}u \\
& & \tfrac{\sqrt{41}}{8}\mathrm{d}v = \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\arcsin v + C \\
&= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{8x+24}{\sqrt{41}}\right)+C.
\end{aligned}$$

d) La division de polynômes nous donne

$$\frac{x^5}{x^3-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^3-1}.$$

Ensuite, on utilise les fractions partielles :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x^3-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\ &= \frac{A(x^2+x+1)+Bx(x-1)C(x-1)}{x^3-1} \\ &= \frac{x^2(A+B)+x(A-B+C)+(A-C)}{x^3-1}.\end{aligned}$$

On trouve les équations

$$A+B=1, \qquad A-B+C=0, \qquad A-C=0,$$

avec la solution

$$A=\tfrac{1}{3}, \qquad B=\tfrac{2}{3}, \qquad C=\tfrac{1}{3}.$$

On trouve donc pour l'intégrale

$$\int \left(x^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\log|x-1| + \frac{1}{3}\log|x^2+x+1| + C.$$

e) On transforme l'intégrande en tangente et en sécante. On a

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2 t + 3\cos^2 t} &= \int \frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{2\tan^2 t + 3} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2+3} && u = \tan x \\ & && \mathrm{d}u = \sec^2 x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{\frac{2}{3}u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+1} && v = \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u \\ & && \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathrm{d}v = \mathrm{d}u \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\arctan v + C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\tan x\right).\end{aligned}$$

Exercice 17. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+\sqrt{x})\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^{1/3}}\right)\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\log^3 t}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$

e) $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{1+s^2}}$

Solution. d) Par essai-erreur, on trouve que -1 est un zéro de $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$. On divise ce polynôme par $x+1$ pour obtenir

$$x^4+2x^3+2x^2+2x+1=(x+1)(x^3+x^2+x+1).$$

On voit maintenant que -1 est encore une racine, donc on trouve

$$x^4+2x^3+2x^2+2x+1=(x+1)^2(x^2+1).$$

On utilise maintenant les fractions partielles. On trouve

$$\frac{x}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C+Dx}{x^2+1}.$$

Ceci mène à

$$\begin{aligned} x &= A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+C(x+1)^2+Dx(x+1)^2 \\ &= x^3(A+D)+x^2(A+B+C+2D)+x(A+2C+D)+(A+B+C). \end{aligned}$$

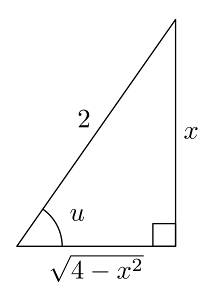
On trouve que la solution est $A=D=0$, $C=\frac{1}{2}$ et $B=-\frac{1}{2}$.

Maintenant, on intègre facilement par

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}+\arctan x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-1\right) \\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

e) L'expression $\sqrt{4-x^2}$ suggère le triangle et les égalités suivants

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \\ \sin u &= \frac{x}{2} \\ \cos u\,\mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}x}{2}. \end{aligned}$$



L'intégrale indéfinie devient

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x &= \int \left(4\sin^2 u\right)\left(2\cos u\right)\left(2\cos u\mathrm{d}u\right)\\ &= 16\int \sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

On pose $I=\int \sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u$. Par intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned}I &= \frac{\cos u\sin^3 u}{3}+\frac{1}{3}\int \sin^4 u\,\mathrm{d}u \qquad\qquad \begin{array}{ll} w=\cos u & \mathrm{d}v=\sin^2 u\cos u\,\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}w=-\sin u\,\mathrm{d}u & v=\frac{\sin^3 u}{3}\end{array}\\ &= \frac{\cos u\sin^3 u}{3}+\frac{1}{3}\int (1-\cos^2 u)\sin^2 u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{\cos u\sin^3 u}{3}-\frac{\sin u\cos u}{6}+\frac{u}{6}-\frac{I}{3}+C.\end{aligned}$$

Il est suffisant de considérer la primitive avec $C=0$. On a donc

$$\begin{aligned}I &= \frac{\cos u\sin^3 u}{4}-\frac{\sin u\cos u}{8}+\frac{u}{8}\\ &= \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{64}-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{32}+\frac{1}{8}\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

Enfin, pour évaluer l'intégrale définie, on a

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = 16I = \left[\frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4}-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+2\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right]_0^2 = 2\arcsin(1)=\pi.$$

f) On peut résoudre l'intégrale par deux substitutions :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{s^2+1}} &= -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}} \qquad\qquad \begin{array}{l} u=\frac{1}{s}\\ \mathrm{d}u=-\frac{1}{s^2}\mathrm{d}s\end{array}\\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}\\ &= \int_{\frac{5}{4}}^2 \frac{\mathrm{d}v}{2\sqrt{v}} \qquad\qquad \begin{array}{l} v=1+u^2\\ \mathrm{d}v=2u\mathrm{d}u\end{array}\\ &= \sqrt{v}\Big|_{\frac{5}{4}}^2\\ &= \sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 18. Soit $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Montrer que si f est paire ($f(-x) = f(x)$), alors $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

b) Montrer que si f est impaire ($f(-x) = -f(x)$), alors $\int_{-a}^{a} f = 0$.

c) Calculer les intégrales suivantes.

i) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x|x|\,\mathrm{d}x$ *ii)* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos^n x\,\mathrm{d}x$ *iii)* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x\,\mathrm{d}x$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

Solution. *i)* L'intégrande est impair, donc on a

$$\int_{-1}^{2} x|x|\mathrm{d}x = \left(\int_{-1}^{1} + \int_1^2\right) x|x|\mathrm{d}x = 0 + \int_1^2 x|x|\mathrm{d}x.$$

Sur l'intervalle $[1,2]$, la valeur absolue n'est plus utile, on a donc

$$\int_1^2 x|x|\mathrm{d}x = \int_1^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 = \frac{7}{3}.$$

ii) L'intégrande est impair. On utilise les identités trigonométriques des fonctions sinus et cosinus pour montrer que l'intégrale est nulle. Avec $u = x - \pi$, on a

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos^n x\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(u+\pi)\cos^n(u+\pi)\mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 u \cos^n u\mathrm{d}u = 0.$$

iii) L'intégrande est impair, donc l'intégrale est nulle

5. Intégrales impropres

Exercice 19. Soit $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Montrer que si $\int_a^\infty f$ converge, alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, si f est un $O\big(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\big)$, alors $\int_a^\infty f$ converge.

c) Trouver une fonction f telle que $\int_a^\infty f$ converge, mais pour laquelle il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que f est un $O\big(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\big)$.

Exercice 20. Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans trouver la valeur).

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \sin t\,\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+\cos x+e^x}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$, $a\neq 0$ et $m\in\mathbb{N}^*$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\sqrt{1+x}}{1-x}\mathrm{d}x$

Solution. a) On peut étudier la convergence de $\int_1^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$, puisque celle-ci converge si et seulement si l'intégrale de départ converge. Ainsi, puisque $x\geq 1$, on a

$$\begin{aligned} x^2\geq x &\Rightarrow -x^2\leq -x \\ &\Rightarrow e^{-x^2}\leq e^{-x} \qquad\qquad \text{(car exp est croissante).}\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{M\to\infty} e^{-M}-e^{-1}=e^{-1}.$$

On a donc $\int_1^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x\leq\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x<\infty$.

b) L'intégrale diverge, car on a

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M \sin t\mathrm{d}t=\lim_{M\to\infty}(-\cos(M)+\cos(0))$$

et cette limite diverge. (Exercice d'analyse 1.)

c) L'intégrale converge, puisque

$$\frac{\sin x}{1+\cos x+e^x}\leq\frac{1}{e^x}=e^{-x}$$

et que $\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$ converge.

d) Le dénumérateur est non nul pour tout x, donc le seul problème se trouve à l'infini. On étudie l'intégrale sur l'intervalle $[1,\infty)$, puisque l'intégrande est intégrable sur $[0,1]$. Pour $x\geq 1$, on a

$$\frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}\leq\frac{1}{x^2}.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{M\to\infty}\left(\frac{-1}{M}+1\right)=1.$$

On conclut que l'intégrale du départ converge.

e) Il y a deux problèmes, lorsque $x\to 0$ et lorsque $x\to\infty$. Ainsi, on sépare l'intégrale sur $[0,1]$ et sur $[1,\infty)$ et on analyse chacune séparemment.

Sur $[1,\infty)$, on a $x^2\leq e^x$ (montrez-le!), donc $x\leq e^{x/2}$. Ainsi, on obtient

$$\frac{x}{e^x-1}\leq\frac{e^{x/2}}{e^x-\frac{1}{2}e^x}=2e^{-x}.$$

On sait que $\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$ converge, donc l'intégrale de départ converge sur $[1,\infty)$.

Sur $[0,1)$, l'intégrale converge, car la limite suivante existe :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{e^x-1} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(1+x+o(x))-1} && \text{(dév. limités de } e^x\text{)}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+o(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+o(1)} = 1.\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ se prolonge comme une fonction continue sur $[0,1]$, ce qui veut dire qu'elle est intégrable.

f) Le problème survient lorsque $x\to 1$, donc on considère l'intégrale sur $[\frac{1}{2},1]$. Pour $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$, on a

$$\frac{x\sqrt{x+1}}{1-x} \geq \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+1}}{1-x}.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{y\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^{y}\frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \lim_{y\to 1^-} -\log(1-y)+\log(\tfrac{1}{2}) = \infty.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x\sqrt{x+1}}{1-x}\mathrm{d}x \geq \sqrt{\frac{3}{8}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \infty.$$

On conclut que l'intégrale impropre diverge.

Exercice 21. Déterminer la convergence des intégrales suivantes. Si elle converge, la calculer. Si elle diverge, calculer la valeur principale si possible.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\log|x|}{x}\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\pi \tan x\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

Solution. a) L'intégrale impropre diverge. La valeur principale vaut 0, puisque l'intégrande est impair et qu'on intègre sur $[-1,1]$.

c) On a

$$\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-1}\Big|_{1+\varepsilon}^{2} = \sqrt{3}-\sqrt{\varepsilon}.$$

L'intégrale impropre converge et elle vaut $\sqrt{3}$.

Exercice 22. (Fonction gamma)

a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge pour tout $x>0$.

On pose $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ pour $x>0$.

b) Montrer que $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ pour $x > 1$.

c) Montrer que $\Gamma(n+1) = n!$ lorsque n un nombre naturel.

d) Étendre le domaine de définition de Γ sur $\{x < 0\} \setminus \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

e) Montrer que

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x,$$

la fameuse *intégrale de Gauss*.

Exercices supplémentaires

Cette section des exercices est optionnelle.

Définition. 1. Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle. Une *partition* (ou subdivision) P de R en rectangles est un ensemble de la forme $P = A \times D$, où $A = \{x_0, \dots, x_n\}$ est une partition de $[a,b]$ et $D = \{y_0, \dots, y_m\}$ est une partition de $[c,d]$.

2. Soit $f \colon R \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit

$$I(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \inf_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x,y)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$
$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sup_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x,y)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

3. On définit l'intégrale intégrale inférieure et l'intégrale supérieure par

$$\underline{\iint_R} f = \sup_P I(f,P) \qquad \text{et} \qquad \overline{\iint_R} f = \inf_P I(f,P),$$

où le supremum et l'infimum sont pris sur toutes les partitions en rectangles de $[a,b] \times [c,d]$.

4. On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) si

$$\underline{\iint_R} f = \overline{\iint_R} f.$$

On note la quantité commune $\iint_R f$ (ou $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A$, où $\mathrm{d}A$ désigne un *élément d'aire*).

Exercice 23. (Théorème de Fubini, version pour intégrale de Riemann) Soit $R = [a,b]\times[c,d]$ et $f \colon R \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Le but de la question est de montrer que

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{$\dagger$}$$

a) Soit $A = [a,b]$ et $B = [c,d]$ et soit $g \colon A \times B \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que

$$\sup_{A\times B} g(x,y) = \sup_{x\in A} \sup_{y\in B} g(x,y) = \sup_{y\in B} \sup_{x\in A} g(x,y).$$

b) Montrer l'équation (†).

Solution. a) D'une part, on a

$$g(x,y) \leq \sup_{A\times B} g$$

pour tout $(x,y) \in A \times B$. Ainsi, on prend $\sup_A$ et $\sup_B$ des deux côtés pour obtenir

$$\sup_{x\in A}\sup_{y\in B} g(x,y) \le \sup_{A\times B} g.$$

D'autre part, on voit que

$$g(x,y) \le \sup_{x\in A}\sup_{y\in B} g(x,y) \tag{$*$}$$

pour tout $x \in A$ et $y \in B$. En effet, par définition, pour chaque $x \in A$ on a

$$\sup_{y\in B} g(x,y) = \sup\{g(x,y) \mid y \in B\},$$

donc comme $g(x,y) \in \{g(x,y) \mid y \in B\}$, il s'ensuit que

$$g(x,y) \le \sup_{y\in B} g(x,y)$$

pour tout $x \in A$. Ensuite, de façon analogue, on a que

$$\sup_{y\in B} g(x,y) \le \sup_{x\in A}\sup_{y\in B} g(x,y),$$

ce qui nous donne $(*)$. Ainsi, le côté droit de l'inégalité est un majorant de $g(A\times B)$, donc

$$\sup_{A\times B} g \le \sup_{x\in A}\sup_{y\in B} g(x,y).$$

b) Soit $P \times Q = \{x_0, \cdots, x_m\} \times \{y_0, \ldots, y_n\}$ une partition de R. Pour chaque $y \in [c,d]$, on note par

$$S(f(\cdot,y),P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x,y)(x_i - x_{i-1})$$

la somme supérieure de f par rapport à la variable x et la partition P de $[a,b]$. Dans cette équation, y est fixe. De façon analogue, on aura la somme supérieure $S(f(x,\cdot),Q)$ par rapport à y, avec x fixé.

On a

$$\begin{aligned}
\overline{\iint_R} f &= \inf_{P\times Q} S(f, P\times Q) \\
&= \inf_{P\times Q} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) \\
&= \inf_{P} \sum_{i=1}^{n} \inf_{Q} S\left(\sup_{x\in[x_i,x_{i-1}]} f(x,\cdot), Q\right)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \inf_{P} \sum_{i=1}^{n} \overline{\int_c^d} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,(x_i - x_{i-1}) \\
&= \overline{\int_c^d} \inf_{P} S(f(\cdot,y),P)\,\mathrm{d}y \\
&= \overline{\int_c^d}\,\overline{\int_a^b} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

On obtient la même formule pour l'intégrale inférieure. Ainsi, puisque f est intégrale, on conclut que toutes les intégrales convergent et que la formule (†) est vérifiée.