Analyse 2

Série 2

Intégration

1. Définition de l'intégrale de Riemann

Exercice 1. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit (P_n) une suite de partitions de $[a,b]$. Montrer que s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $I(f,P_n) \to L$ et $S(f,P_n) \to L$ lorsque $n \to \infty$, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f = L$.

Exercice 2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe une suite de partitions (P_n) de $[a,b]$ telle que $S(f,P_n) - I(f,P_n) \to 0$.

a) On pose $Q_n = P_1 \cup \cdots \cup P_n$. Montrer que Q_n est une partition de $[a,b]$ et que la suite $\big(I(f,Q_n)\big)$ converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to \infty$.

b) Montrer que $S(f,Q_n) - I(f,Q_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

c) Montrer que f est intégrable et que $\int_a^b f = L$.

Exercice 3. À l'aide de l'exercice 1, montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur l'intervalle $I = [a,b]$ indiqué en utilisant la suite de partitions donnée par $P_n = \{a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, \ldots, a + (n-1)\Delta x, b\}$, où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

a) $f(x) = x$ sur $[1,2]$

$f(x) = x^2 + 1$ sur $[0,1]$

c)† $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[1,2]$

Exercice 4. Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables à l'aide de la définition.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $(0,1]$

b) $f(x) = x + 2$ sur $[1,2]$

c) $f(x) = 0$ sur $[0,\infty)$

d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \end{cases}$ sur $[0,1]$

2. Propriétés de l'intégrale

Exercice 5. Montrer les propriétés suivantes de l'intégrale.

a) Si f est bornée sur $[a,b]$, alors pour tout $c \in [a,b]$, on a

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f.$$

b) Si f est intégrable sur $[a,b]$ et si $c \in \mathbb{R}$, alors cf est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b cf = c\left(\int_a^b f\right).$$

c) Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Exercice 6. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Montrer que $|f|$ est intégrable.

b) Montrer que f^2 est intégrable (f au carré).
Suggestion. Montrez d'abord qu'il existe $R \geq 0$ tel que $M_j^2 - m_j^2 \leq R(M_j - m_j)$, où $M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f$ et $m_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f$. Vous devrez également montrer que $\sup_A(f^2) = \left(\sup_A f\right)^2$, (et de même pour inf), en général.

Exercice 7. (Inégalité de Schwarz)

a) Soit le polynôme de degré deux $p(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Montrer que si $p(x) \geq 0$ pour tout x, alors son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif ou nul.

b) Soit $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Montrer que

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

Indice. Poser le polynôme $p(\lambda) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 8. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_a^b f^2 = 0$, alors $f \equiv 0$ (c'est-à-dire $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$). Montrer que si f est seulement intégrable, alors l'énoncé est faux.

Exercice 9. Donner une exemple d'une fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ non intégrable, mais telle que $|f|$ est intégrable.

Exercice 10. (Théorème de la moyenne) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Soit m le minimum de f et M, son maximum. Montrer que

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M.$$

b) Déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

3. Théorème fondamental du calcul

Exercice 11. Soit h une fonction continue et intégrable et soit f, g deux fonctions bornées et dérivables. Calculer la dérivée de

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 12. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) := \int_a^x f$.

a) Montrer que F est continue sur $[a,b]$.
Remarque. Une fonction intégrable au sens de Riemann est nécessairement bornée.

b) La *fonction de Heaviside* est la fonction

$$H(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer qu'il n'existe aucune fonction intégrable $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ telle que $H(x) = \int_{-1}^x f$.

c) Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$, on a $|F(x) - F(y)| \leq M|x-y|$.

d) Montrer qu'il n'existe aucune fonction intégrable $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\sqrt{x} = \int_0^x f$.

Exercice 13. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) := \int_a^x f$. Montrer que si f est continue en $y \in [a,b]$, alors F est dérivable en y.

Exercice 14. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On admet qu'alors l'intégrale de f peut s'écrire comme une somme de Riemann de la forme

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right).$$

Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} e^{k/n}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

d) Trouver une fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ qui est n'est pas intégrable, mais dont la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\tfrac{j}{n}\right)$$

converge.

Exercice 15. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{n}$$

et, pour $n \geq 2$,

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n-1}.$$

b) On pose $f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Montrer que la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - f(n)$$

converge. Que pouvez-vous dire sur la valeur de la limite?

4. Techniques d'intégration

Exercice 16. Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{cotan}(3t)}$

b) $\displaystyle\int \log x \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}}$

d) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3 - 1} \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2 t + 3\cos^2 t}$

f) $\displaystyle\int x \arctan x \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^3}$

Exercice 17. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+\sqrt{x})\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^{1/3}}\right)\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\log^3 t}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$

e) $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{1+s^2}}$

Exercice 18. Soit $f\colon[-a,a]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Montrer que si f est paire ($f(-x)=f(x)$), alors $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.

b) Montrer que si f est impaire ($f(-x)=-f(x)$), alors $\int_{-a}^a f = 0$.

c) Calculer les intégrales suivantes.

i) $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\,\mathrm{d}x$

ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^3 x\cos^n x\,\mathrm{d}x$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3\cos x\,\mathrm{d}x$

5. Intégrales impropres

Exercice 19. Soit $f\colon[a,\infty)\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Montrer que si $\int_a^\infty f$ converge, alors $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, si f est un $O\big(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\big)$, alors $\int_a^\infty f$ converge.

c) Trouver une fonction f telle que $\int_a^\infty f$ converge, mais pour laquelle il n'existe aucun $\varepsilon>0$ tel que f est un $O\big(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\big)$.

Exercice 20. Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans trouver la valeur).

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \sin t\,\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+\cos x+e^x}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$, $a\neq 0$ et $m\in\mathbb{N}^*$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\sqrt{1+x}}{1-x}\mathrm{d}x$

Exercice 21. Déterminer la convergence des intégrales suivantes. Si elle converge, la calculer. Si elle diverge, calculer la valeur principale si possible.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\log|x|}{x} \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \tan x \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x$

Exercice 22. (Fonction gamma)

a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge pour tout $x > 0$.

On pose $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

b) Montrer que $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ pour $x > 1$.

c) Montrer que $\Gamma(n+1) = n!$ lorsque n un nombre naturel.

d) Étendre le domaine de définition de Γ sur $\{x < 0\} \setminus \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

e) Montrer que

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

la fameuse *intégrale de Gauss*.

Exercices supplémentaires

Cette section des exercices est optionnelle.

Définition. 1. Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle. Une *partition* (ou subdivision) P de R en rectangles est un ensemble de la forme $P = A \times D$, où $A = \{x_0, \ldots, x_n\}$ est une partition de $[a,b]$ et $D = \{y_0, \ldots, y_m\}$ est une partition de $[c,d]$.

2. Soit $f\colon R \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit

$$I(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \inf_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x,y)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$
$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sup_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x,y)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

3. On définit l'intégrale intégrale inférieure et l'intégrale supérieure par

$$\underline{\iint_R} f = \sup_P I(f,P) \qquad \text{et} \qquad \overline{\iint_R} f = \inf_P I(f,P),$$

où le supremum et l'infimum sont pris sur toutes les partitions en rectangles de $[a,b] \times [c,d]$.

4. On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) si

$$\underline{\iint_R} f = \overline{\iint_R} f.$$

On note la quantité commune $\iint_R f$ (ou $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A$, où $\mathrm{d}A$ désigne un *élément d'aire*).

Exercice 23. (Théorème de Fubini, version pour intégrale de Riemann) Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ et $f\colon R \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Le but de la question est de montrer que

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{$\dagger$}$$

a) Soit $A = [a,b]$ et $B = [c,d]$ et soit $g\colon A \times B \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que

$$\sup_{A\times B} g(x,y) = \sup_{x\in A} \sup_{y\in B} g(x,y) = \sup_{y\in B} \sup_{x\in A} g(x,y).$$

b) Montrer l'équation ($\dagger$).