Analyse 2

Série 1

Préliminaires (solutionnaire)

Exercice 1. a) Soit I un intervalle et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit c et $h > 0$ tels que $c \in I$ et $c + h \in I$. Montrer que si f est continue en c, alors

$$\lim_{h\to 0^+} \sup_{[c,c+h]} f(x) = f(c).$$

Montrer que le cas où $h < 0$ est également vrai. Déduire ensuite le cas de l'infimum.

b) Trouver une fonction $g\colon I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{h\to 0^+} \sup_{[c,c+h]} g(x) \neq g(c).$$

Solution. a) D'abord, notons que si $h > 0$ est assez petit, alors

$$\sup_{[c,c+h]} f$$

est borné, car f est continue en c. De plus, pour tout $h > 0$ assez petit, on a que

$$f(c) \leq \sup_{[c,c+h]} f,$$

donc le supremum est également minoré pour tout ces h.

Soit (y_n) une suite décroissante telle que $0 < y_0 < h$ et $y_n \downarrow 0$ lorsque $n \to \infty$. On pose

$$S_n = \sup_{[c,c+y_n]} f.$$

C'est une suite décroissante et minorée, donc elle converge vers, disons, S.

Pour chaque n, on a que $S_n - y_n < S_n$, donc $S_n - y_n$ n'est pas un majorant de $f([c, c+y_n])$ sur $[c, c + y_n]$. Ainsi, il existe $x_n \in [c, c + y_n]$ tel que

$$S_n - y_n \leq f(x_n) \leq S_n. \tag{$*$}$$

Lorsque $n \to \infty$, la suite (x_n) converge vers c, donc si on laisse $n \to \infty$ dans $(*)$, on obtient

$$S - 0 \leq f(c),$$

car f est continue en c (donc $f(x_n) \to f(c)$). Puisque $S_n \geq f(x)$ pour tout n, il suit que $S = f(c)$, c'est-à-dire

$$f(c) = S = \lim_{n\to\infty} \sup_{[c,c+y_n]} f.$$

Puisque cela est vrai pour toutes les suites (y_n) telles que $y_n \downarrow 0$, on conclut que

$$f(c) = \lim_{h\to 0^+} \sup_{[c,c+h]} f.$$

b) $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$ fait l'affaire. Je vous laisse écrire les détails.

Exercice 2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y, z \in [a,b]$ avec $0 < z - y \leq \delta$, on ait

$$\sup_{x\in[y,z]} f(x) \leq \inf_{x\in[y,z]} f(x) + \varepsilon.$$

Exercice 3. On considère l'énoncé suivant.

> *Soit $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue sur (a,b). Alors f est uniformément continue.*

a) Cet énoncé est-il vrai ou faux? Sans tenter de la résoudre rigoureusement, essayez de vous convaincre d'un côté ou de l'autre.

b) Montrer que f, définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0,1)$, n'est pas uniformément continue sur $(0,1)$.

c) Quelle est réponse du a)?

Solution. b) Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$. On pose $x_k = \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}$ et $y_k = \frac{1}{2\pi k + \frac{3\pi}{2}}$. Pour tout $\delta > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $|x_K - y_K| < \delta$, car $(x_k - y_k) \to 0$ lorsque $k \to \infty$. De plus, on voit que

$$|f(x_k) - f(y_k)| = \left|\sin\left(2\pi k + \tfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2\pi k + \tfrac{3\pi}{2}\right)\right| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon.$$

Il suit que f n'est pas uniformément continue sur $[0,1]$.

c) La réponse est non. L'énoncé est faux, puisque la fonction f du b) en est un contre-exemple.

Exercice 4. Soit I un intervalle et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Montrer que pour tout $a < b$ dans I, il existe M tel que pour tout $a \leq x \leq y \leq b$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est uniformément continue, continue seulement ou ni l'un ni l'autre.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,1]$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,\infty)$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1,\infty)$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $(0,1)$ e) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0,1)$ f) $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0,1]$

Solution. a) UC, car c'est une fonction continue sur un intervalle compact.

b) UC. Sur $[0,1]$, on sait déjà qu'elle est UC. Sur $[1,\infty)$, on sait que

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, par le théorème des accroissaments finis, on a

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

pour tout $x, y \in [1,\infty)$. Il suit que f est uniformément continue sur $[1,\infty)$.

On conclut que f est uniformément continue sur $[1,\infty)$.

c) UC. Comme la solution au b).

d) Continue, mais pas UC. En effet, il est clair que f est continue sur $(0,1)$. Par contre, on sait que $f(x) \to \infty$ lorsque $x \to 0^+$, donc f ne peut pas être uniformément continue.

e) UC. Lorsque $x \to 0^+$, on a que $f(x) \to \frac{\pi}{2}$. Lorsque $x \to 1^-$, on a que $f(x) \to \frac{\pi}{4}$. Par un théorème vu en classe, f est uniformément continue.

f) UC. Lorsque $x \to 0^+$, on a que $f(x) \to 0$. Il suit que f est UC.

Exercice 6. a) Développements limités. Montrer que si f est n-fois dérivable en x_0, alors

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

b) Montrer les égalités suivantes*.

i) $\sin(x) = x + o(x^2)$ *ii)* $\log(1+x) = x + o(x)$ *iii)* $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$

Exercice 7. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable en $a \in I$. Le développement limité à l'ordre $k \leq n$ de f est l'expression de la forme

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(h^k).$$

Déterminer le développement limité à l'ordre k des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $a = 0$, $k = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$ et $a = 0$, $k = 4$

* On prend pour acquis que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{1}{x}$ et que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$ pour le moment. Cela sera démontré au chapitre 5, où ces fonctions seront également définies.

Exercice 8. Soit $f, g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ deux fonctions. Montrer que si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

Solution. Soit L la limite. On sait que $L \geq 0$, car f et g sont à valeurs positives. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \geq M$, on a

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que $f(x) < (L+\varepsilon)g(x)$, d'où f est un $O(g(x))$.

Exercice 9. Soit $a > 0$ et $f, g\colon (-a, a) \to (0,\infty)$. Montrer que si la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

Exercice 10. (Optionnel) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+4^k}.$$

Solution. Vous pouvez ignorer cette question, mais je donne la solution pour les curieux et curieuses.

La série diverge. D'abord, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on voit que $0 \leq \frac{4^k}{n^2} \leq 1$ si et seulement si $0 \leq k \leq \log_2 n$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+4^k} &\geq \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{n^2}{n^2+4^k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{1}{1+\frac{4^k}{n^2}} \\
&\geq \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{1}{1+1} \text{ (car } 0 \leq \tfrac{4^k}{n^2} \leq 1 \text{ pour } 0 \leq k \leq \lfloor \log_2 n \rfloor) \\
&= \tfrac{1}{2}\lfloor \log_2 n \rfloor.
\end{aligned}$$

Si on laisse $n \to \infty$, on voit que la somme du départ tend vers $+\infty$.