Analyse 2

Série 1

Préliminaires

Exercice 1. a) Soit I un intervalle et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit c et $h > 0$ tels que $c \in I$ et $c + h \in I$. Montrer que si f est continue en c, alors

$$\lim_{h \to 0^+} \sup_{[c,c+h]} f(x) = f(c).$$

Montrer que le cas où $h < 0$ est également vrai. Déduire ensuite le cas de l'infimum.

b) Trouver une fonction $g\colon I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{h \to 0^+} \sup_{[c,c+h]} g(x) \neq g(c).$$

Exercice 2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y, z \in [a,b]$ avec $0 < z - y \leq \delta$, on ait

$$\sup_{x \in [y,z]} f(x) \leq \inf_{x \in [y,z]} f(x) + \varepsilon.$$

Exercice 3. On considère l'énoncé suivant.

> *Soit $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue sur (a,b). Alors f est uniformément continue.*

a) Cet énoncé est-il vrai ou faux? Sans tenter de la résoudre rigoureusement, essayez de vous convaincre d'un côté ou de l'autre.

b) Montrer que f, définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0,1)$, n'est pas uniformément continue sur $(0,1)$.

c) Quelle est réponse du a)?

Exercice 4. Soit I un intervalle et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Montrer que pour tout $a < b$ dans I, il existe M tel que pour tout $a \leq x \leq y \leq b$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est uniformément continue, continue seulement ou ni l'un ni l'autre.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,1]$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,\infty)$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1,\infty)$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $(0,1)$ e) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0,1)$ f) $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0,1]$

Exercice 6. a) Développements limités. Montrer que si f est n-fois dérivable en x_0, alors

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

b) Montrer les égalités suivantes*.

i) $\sin(x) = x + o(x^2)$ *ii)* $\log(1+x) = x + o(x)$ *iii)* $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$

Exercice 7. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable en $a \in I$. Le développement limité à l'ordre $k \leq n$ de f est l'expression de la forme

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(h^k).$$

Déterminer le développement limité à l'ordre k des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $a = 0$, $k = 2$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$ et $a = 0$, $k = 4$

Exercice 8. Soit $f, g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ deux fonctions. Montrer que si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

Exercice 9. Soit $a > 0$ et $f, g\colon (-a,a) \to (0,\infty)$. Montrer que si la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

Exercice 10. (Optionnel) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+4^k}.$$

---

* On prend pour acquis que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{1}{x}$ et que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$ pour le moment. Cela sera démontré au chapitre 5, où ces fonctions seront également définies.