Analyse 2 — Quiz 3

28 septembre 2022

Nom : ____________________________

Matricule : ____________

/12

→ Choisir le premier énoncé vrai.

Exercice 1. Soit $H\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

On pose $F(x) = \int_{-1}^{x} H$.

a) F est une primitive de H.

b) F est dérivable.

c) H n'a pas de primitive.

d) $F(x) = \max\{0, x\}$.

e) F est continue.

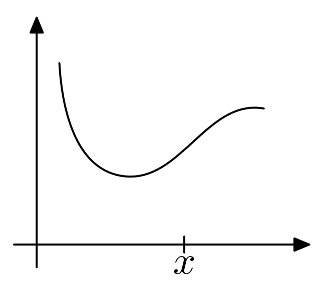
Solution. La bonne réponse était c), car si H avait eu une primitive, alors F en aurait été une, mais cela n'est pas le cas, puisque $F'(0)$ n'existe pas. (Rappelă: F est une primitive si $F'(x) = H(x)$ pour tout x.)

Puisque c) n'était pas dans le choix de réponse, la prochaine réponse vraie était d). En effet, en intégrant H, on trouvait $F(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F(x) = x$ si $x \geq 0$.

→ Dessiner.

Exercice 2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dont le graphe est représenter sur la figure. Soit $x \in (a,b)$ et $h > 0$ tel que $x + h \in (a,b]$. Soit $F(x) = \int_{a}^{x} f$.

Dessiner $F(x+h) - F(x)$ sur



Solution. Le dessin correspondait à l'aire sous la courbe de f entre x et $x + h$.

→ Réponse courte.

Exercice 3. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g\colon [c,d] \to [a,b]$ une fonction dérivable. Pour $x \in [c,d]$, on pose $F(x) = \int_{a}^{g(x)} f$. Calculer $F'(x)$.

$F'(x) =$ ____________________

Solution. La réponse est $F'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$. Pour le voir, on pose $G(x) = \int_a^x f$. On a donc que $F(x) = G\big(g(x)\big)$ et donc on dérive en appliquant la règle de dérivation en chaîne. On a

$$F'(x) = G'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x),$$

car $G'(x) = f(x)$ par le TFC1.