Analyse 2 — Quiz 1

14 septembre 2022

Nom : ____________________________

Matricule : ____________

/14

Question 1. Parmi les fonctions suivantes, encercler celles qui sont uniformément continues sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0,1)$

b) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0,1)$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $(0,1)$

d) $f(x) = \log x$ sur $[1,2]$

e) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $(0,1)$

f) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,1]$

Solution. Réponse : a,d,e,f, car ce sont toutes des fonctions telles que les limites quand $x \to a^+$ et $x \to b^-$ existent (où a et b sont les bornes de l'intervalle I de chaque question).

→ Choisir le premier énoncé vrai.

Question 2. Soit $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$. Alors

a) f est un $o(x^4)$ lorsque $x \to 0$;

b) f est un $o(x^3)$ lorsque $x \to 0$;

c) f est un $o(x^2)$ lorsque $x \to 0$;

d) f est un $o(x)$ lorsque $x \to 0$;

e) f est un $o(1)$ lorsque $x \to 0$.

Solution. Réponse : b), car $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$, donc $1 - \frac{x^2}{2} - \cos x = -\frac{x^4}{4!} + o(x^4)$, mais $-\frac{x^4}{4!}$ n'est pas une $o(x^4)$. Par contre, c'est bien un $o(x^3)$.

Question 3. Soit $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Alors

a) f est un $O(1)$ lorsque $x \to \infty$;

b) f est un $O(\log x)$ lorsque $x \to \infty$;

c) f est un $O(x)$ lorsque $x \to \infty$;

d) f est un $O(e^x)$ lorsque $x \to \infty$.

Solution. a), car f est bornée, donc il existe M telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout x. En particulier, f est un $O(1)$.

→ Réponse courte. (Ne pas justifier.)

Question 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} n!\,\log\left(1 + \frac{1}{(2n)!}\right).$$

Réponse : 0

Suggestion. Utilisez le développement limité de $\log(1+x)$ en $x = 0$.

Solution. On sait que $\log(1+x) = x + o(x)$ par le théorème des développements limités. Ainsi, on a

$$n!\log\left(1+\tfrac{1}{(2n)!}\right) = n!\left(\frac{1}{(2n)!} + o\left(\tfrac{1}{(2n)!}\right)\right).$$

On sait que $\frac{n!}{(2n)!} = \frac{1}{(n+1)\cdots(2n)} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. De plus, on a

$$n! o\left(\tfrac{1}{(2n)!}\right) = \frac{n!}{(2n)!}\,\frac{o\left(\frac{1}{(2n)!}\right)}{\frac{1}{(2n)!}} \to 0 \cdot 0 = 0$$

lorsque $n \to \infty$.