Analyse 2 — Minitest

20 octobre 2022

Nom : ______________________________ $/20$

Matricule : _____________

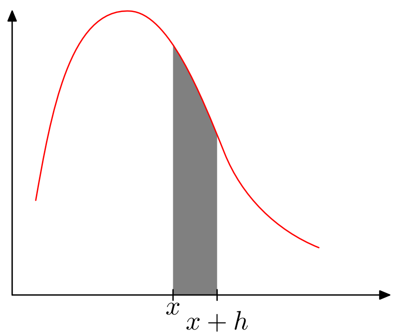
Justifier toutes vos réponses.

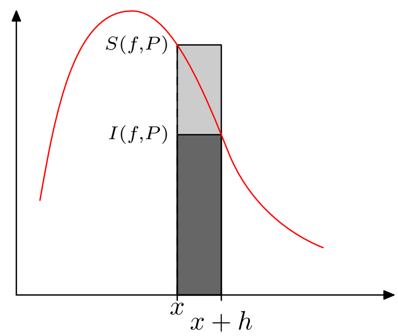
Exercice 1. (10pts) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) = \int_a^x f$. Soit $x_0 \in [a,b)$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \in [a,b]$.

a) Représenter sur le dessin $F(x_0+h) - F(x_0)$.

b) Soit $P = \{x_0, x_0+h\}$ une partition. Représenter sur le même dessin $I(f,P)$ et $S(f,P)$.

c) Montrer que F est continue en x_0.
Indice. Inspirez-vous de votre dessin pour encadrer $F(x_0+h) - F(x_0)$. N'oubliez pas le cas où $h < 0$.





Solution. a) Voir la figure à gauche. Il fallait dessiner l'aire sous la courbe.

b) Voir la figure à droite. Il fallait dessiner des rectangles.

c) Comme le montre les figures (ou par la défition de $I(f,P)$, $S(f,P)$ et de l'intégrale), on a

$$I(f,P) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq S(f,P),$$

c'est-à-dire

$$\left(\inf_{[x_0,x_0+h]} f\right) h \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq \left(\sup_{[x_0,x_0+h]} f\right) h.$$

Puisque f est bornée, il existe m, M tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x, donc on a

$$mh \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq Mh.$$

Si on laisse h tendre vers 0^+, par le théorème des deux gendarmes, on obtient que $F(x_0 + h) - F(x_0) \to 0$.

Si $h < 0$, alors on trouve encore

$$mh \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq Mh,$$

et aussi $F(x_0+h) - F(x_0) \to 0$ lorsque $h \to 0^-$.

Ceci permet de conclure que $F(x_0+h) \to F(x_0)$ lorsque $h \to 0$, d'où F est continue en x_0.

Exercice 2. (10pts) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n \sin\left(\tfrac{x}{n}\right).$$

a) Montrer que f_n converge simplement vers $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $f_n \to f$ uniformément sur $[-1, 1]$.

c) Est-ce que $f_n' \to f'$ uniformément sur $[-1, 1]$?

Solution. a) Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ pour tout n et donc $f_n(0) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Si $x \neq 0$, alors on a

$$n \sin\left(\tfrac{x}{n}\right) = x \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \longrightarrow x \qquad \text{lorsque } n \to \infty,$$

car $\frac{\sin y}{y} \to 1$ lorsque $y \to 0$. En combinant les deux cas, on conclut que $f_n \to id$ simplement sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \to \infty$.

b) On pose $g_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x$. On a

$$g_n'(x) = \cos\left(\tfrac{x}{n}\right) - 1 \leq 0$$

pour tout x. Ainsi, g_n est décroissante et g_n atteint son minimum en $g_n(1) = n \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1$ et son maximum en $g_n(-1) = -n \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1$. Le maximum de $|g_n(x)|$ est donc atteint en $g(1)$. Il suit que

$$\sup_{x \in [-1,1]} \left| n \sin\left(\tfrac{x}{n}\right) - x \right| = 1 - n \sin\left(\tfrac{1}{n}\right) \longrightarrow 0$$

lorsque $n \to \infty$, car $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

c) La réponse est oui. Il suffit de montrer que $g_n' \to 0$ unformément sur $[-1, 1]$ lorsque $n \to \infty$. On a

$$g_n''(x) = -\tfrac{1}{n} \sin\left(\tfrac{x}{n}\right) \begin{cases} > 0, & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ = 0, & \text{si } x = 0, \\ < 0, & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

On voit que g_n' possède un maximum en $x = 0$ et un minimum en $x = \pm 1$. Puisque $g_n'(0) = 0$, le maximum de $|g_n'(x)|$ n'est pas atteint en $x = 0$, mais plutôt en $|g_n'(1)|$. On a donc

$$\sup_{x \in [-1,1]} |g_n'(x)| = -g_n'(1) = 1 - \cos\left(\tfrac{x}{n}\right) \longrightarrow 0$$

lorsque $n \to \infty$. D'où $f_n' \to f'$ uniformément sur $[-1, 1]$ lorsque $n \to \infty$.