Analyse 2

Examen intra – automne 2022

Faculté des arts et des sciences – Département de mathématiques et de statistique

Enseignant : Jonathan Godin
Signle : MAT2050A
Date : jeudi 3 novembre 2022

L'examen dure 110 minutes. Vous n'avez droit à aucun matériel, autre qu'un crayon (ou un stylo) et une efface. **Justifiez vos réponses.**

$/35$

Exercice 1. (5pts) Questions courtes.

a) Soit (f_n) la suite de fonctions de $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n \log\bigl(1 + \tfrac{x}{n}\bigr).$$

Trouver $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \to f$ simplement sur $(0, \infty)$ lorsque $n \to \infty$.

b) (Bonus 3pts) Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_a^{a+x} f(t)\mathrm{d}t}{\sin(x)}.$$

Solution. a) Il y a quelques façons de procéder. En voici une assez simple avec le petit o. On a

$$n \log\bigl(1 + \tfrac{x}{n}\bigr) = n\Bigl(\tfrac{x}{n} + xo\bigl(\tfrac{1}{n}\bigr)\Bigr) = x + xo(1) \to x$$

lorsque $n \to \infty$.

b) On pose $F(x) = \int_a^x f$. Par le théorème fondamental du calcul 1, F est dérivable. De plus, par les propriétés de l'intégrale, on sait que $F(a) = 0$. Ainsi, par la règle de l'Hôpital, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(a+x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(a+x)}{\cos x} = \frac{f(a)}{\cos 0} = f(a).$$

Exercice 2. (10pts) On pose $I_n = \int_0^1 \bigl(1 - t^4\bigr)^{n^2} \mathrm{d}t$.

a) Montrer que $0 \leq 1 - t \leq e^{-t}$ pour $t \in [0, 1]$. Déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^4} \mathrm{d}x$.

b) Montrer que $\int_0^\infty e^{-x^4} dx$ converge. Déduire que $I_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(Suite au verso)

Solution. a) Il est clair que $0 \leq 1-t$. Ensuite, par le théorème de Taylor, il existe $\xi \in (0,t)$ tel que

$$e^{-t} = 1 - t + \tfrac{1}{2}e^{-\xi}t^2.$$

Ainsi, il suit que $e^{-t} \geq 1-t$, puisque $\frac{1}{2}e^{-\xi}t^2 \geq 0$.

Puisque $t \in [0,1]$ si et seulement si $t^4 \in [0,1]$, il suit que $0 \leq 1 - t^4 \leq e^{-t^4}$ et donc $0 \leq (1-t^4)^{n^2} \leq e^{-n^2t^4}$.

Par les propriétés de l'intégrale, on a

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-n^2t^4}\mathrm{d}t.$$

On pose $x = t\sqrt{n}$, donc la dernière intégrale devient

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^4}\mathrm{d}x.$$

b) Pour $x \in [1,\infty)$, on a $e^{-x^4} \leq e^{-x}$. De plus, on sait que $\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$ converge par calcul direct. Par le critère de comparaison, il suit que $\int_1^\infty e^{-x^4}\mathrm{d}x$ converge. On a donc

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^4}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_0^1 e^{-x^4}\mathrm{d}x + \int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x\right) \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Par le théorème des deux gendarmes, on conclut que $I_n \to 0$.

Exercice 3. (10pts) Soit la série $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$.

a) Pour $x \in (0,\infty)$, montrer que la série $f(x)$ converge et que

$$f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

b) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ne^{-n}$.

Solution. a) Si $x \in (0,\infty)$, alors $0 < e^{-x} < 1$. Ainsi, la série est une série géométrique de raison $r = e^{-x} < 1$ et donc elle converge. Ceci montre que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

b) On pose $M_n = e^{-\frac{n}{2}}$. On a alors $0 \leq e^{-nx} \leq M_n$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2},\infty\right)$. Puisque $\sum M_n$ converge, par le critère de Weierstrass, il suit que $\sum e^{-nx}$ converge uniformément sur $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$.

Ensuite, on pose $K_n = ne^{-\frac{n}{2}}$. On a $0 \leq ne^{-nx} \leq K_n$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ et la série $\sum K_n$ converge, donc la série $\sum ne^{-nx}$ converge uniformément sur $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Par le théorème vu en classe, f est dérivable et on peut dériver f terme à terme. On a donc

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-n)e^{-nx} = \frac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}.$$

Si on évalue en $x = 1$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n} = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}.$$

Exercice 4. (10pts) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que f'' est bornée. Pour $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on pose

$$F(h) = \int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\lim\limits_{h\to 0} F(h) = f(b) - f(a)$.

Indice. Considérez une suite (h_n) telle que $h_n \neq 0$ et $h_n \to 0$. Ensuite, considérez la fonction $g_n(x) = \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$. Vous aurez probablement à utiliser le théorème de Taylor.

Solution. Soit (h_n) une suite telle que $h_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $h_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On pose $g_n(x) = \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$. Puisque f'' est bornée, il existe $M \geq 0$ tel que $|f''(x)| \leq M$ pour tout x.

Par le théorème de Taylor, il existe ξ_n entre x et $x + h_n$ tel que

$$f(x+h_n) = f(x) + f'(x)h_n + \tfrac{1}{2}f''(\xi_n)h_n^2$$

et donc

$$|f(x+h_n) - f(x) - f'(x)h_n| \leq |f''(\xi_n)|h_n^2 \leq Mh_n^2.$$

On divise par $|h_n|$:

$$|g_n(x) - f'(x)| \leq Mh_n.$$

Cette inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et le côté droit ne dépend pas de x, donc on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - f'(x)| \leq Mh_n \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Ceci montre que $g_n \to f'$ uniformément sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, on a

$$\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h_n}\mathrm{d}x = \int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x \to \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

La dernière égalité suit du théorème fondamental du calcul 2.

Puisque la suite (h_n) était arbitraire, on en déduit que

$$\lim_{h\to 0} F(h) = f(b) - f(a).$$