Analyse 2

Examen intra – automne 2022

Faculté des arts et des sciences – Département de mathématiques et de statistique

Enseignant : Jonathan Godin
Signle : MAT2050A
Date : jeudi 3 novembre 2022

L'examen dure 110 minutes. Vous n'avez droit à aucun matériel, autre qu'un crayon (ou un stylo) et une efface. **Justifiez vos réponses.**

$$/35$$

Exercice 1. (5pts) Questions courtes.

a) Soit (f_n) la suite de fonctions de $(0,\infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n\log\bigl(1 + \tfrac{x}{n}\bigr).$$

Trouver $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \to f$ simplement sur $(0,\infty)$ lorsque $n \to \infty$.

b) (Bonus 3pts) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_a^{a+x} f(t)\mathrm{d}t}{\sin(x)}.$$

Exercice 2. (10pts) On pose $I_n = \int_0^1 \left(1 - t^4\right)^{n^2} \mathrm{d}t$.

a) Montrer que $0 \le 1 - t \le e^{-t}$ pour $t \in [0,1]$. Déduire que $0 \le I_n \le \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^4} \mathrm{d}x$.

b) Montrer que $\int_0^\infty e^{-x^4} dx$ converge. Déduire que $I_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 3. (10pts) Soit la série $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$.

a) Pour $x \in (0,\infty)$, montrer que la série $f(x)$ converge et que

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

b) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ne^{-n}$.

(Suite au verso)

Exercice 4. (10pts) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que f'' est bornée. Pour $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on pose

$$F(h) = \int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \, \mathrm{d}x.$$

Montrer que $\lim_{h \to 0} F(h) = f(b) - f(a)$.

Indice. Considérez une suite (h_n) telle que $h_n \neq 0$ et $h_n \to 0$. Ensuite, considérez la fonction $g_n(x) = \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$. Vous aurez probablement à utiliser le théorème de Taylor.