Analyse 2

Examen final – automne 2021

Jeudi le 9 décembre 2021

L'examen dure 170 minutes et il est sur 44 points. Vous n'avez droit à aucun matériel, autre qu'un crayon (ou un stylo) et une efface. **Justifiez vos réponses.**

Formules utiles :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad (|x| < 1),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 1. (8pts) Soit $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction m fois continûment dérivable. Montrer que si $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$ pour $k = 0, 1, \ldots, m$, alors

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{1 + |n|^m} \qquad \text{pour tout } n.$$

Exercice 2. (12pts) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(1) \neq 0$. On pose $C = \log(f(1))$. On suppose que $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = e^{Cx}$

a) en supposant que f est continûment dérivable et en utilisant le théorème fondamental du calcul;

b) en supposant seulement que f est dérivable et en utilisant la dérivée;

c) en supposant seulement que f est continue.
Indice pour le c). Considérez d'abord le problème pour les x rationnels.

Exercice 3. (8pts) Montrer que le logarithme n'est pas une fonction rationnelle sur $(0, \infty)$.
Indice. Que pouvez-vous dire de $\frac{\log x}{x^{\varepsilon}}$ pour différentes valeurs de ε?

Exercice 4. (8pts) Calculer les limites suivantes *sans* utiliser la règle de l'Hôpital. Le c) est en bonus.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin x}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} \log\left(1 + \tfrac{1}{x}\right)$ c) $\displaystyle\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathbb{N}}} n \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\log n}$ (Bonus 4pts)

Ne paniquez pas à la vue de cette question! L'énoncé est long, mais prenez quand même le temps de respirer et de le lire attentivement.

Exercice 5. (8pts) (Théorème d'approximation de Weierstrass[1]). Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et régulière par morceaux. Le but est de montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$. On pose

$$g(x) = \begin{cases} f(|x|), & \text{si } x \in [-1,1]; \\ f(1), & \text{si } x \in [-\pi,\pi] \setminus [-1,1]; \end{cases}$$

$$a_k := a_k(g),$$

$$\text{et} \quad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx).$$

Indication. Le a) et le b) sont indépendants, c'est-à-dire qu'on n'utilise pas le a) pour faire le b). Le c) combine le a) et le b).

a) Montrer que pour tout ε, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors

$$\sup_{[0,1]} |s_n - f| < \varepsilon.$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour chaque k, il existe $m(k) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!} - \cos(kx) \right| < \frac{\varepsilon}{2^k |a_k|}$$

c) On pose

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!}.$$

Montrer que si $n \geq N$, alors

$$\sup_{x \in [0,1]} |P_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

[1] Le théorème est vrai pour f continue, mais on suppose que f est régulière par morceaux pour cet exercice.