Analyse 2

Examen final – automne 2021

Jeudi le 9 décembre 2021

L'examen dure 170 minutes et il est sur 44 points. Vous n'avez droit à aucun matériel, autre qu'un crayon (ou un stylo) et une efface. **Justifiez vos réponses.**

Formules utiles :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \quad (|x| < 1),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 1. (8pts) Soit $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction m fois continûment dérivable. Montrer que si $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$ pour $k = 0, 1, \ldots, m$, alors

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{1 + |n|^m} \qquad \text{pour tout } n.$$

Solution. On a pour $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$

$$\begin{aligned} c_n(f^{(j)}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(j)}(t) e^{-int} \mathrm{d}t \\ &= \left. \frac{f^{(j)}(t) e^{-int}}{-in} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{-2i\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(j+1)}(t) e^{-int} \mathrm{d}t \\ &= 0 - \frac{i}{n} c_n(f^{(j+1)}). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{i}{n} c_n(f') \\ &= \frac{i^2}{n^2} c_n(f'') \\ &\vdots \\ &= \frac{i^m}{n^m} c_n(f^{(m)}). \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$|c_n(f)| = \left| \frac{c_n(f^{(m)})}{n^m} \right| \leq \frac{2|c_n(f^{(m)})|}{1 + |n|^m} \leq \frac{C}{1 + |n|^m},$$

où C est une borne de la suite des $2c_n(f^{(n)})$. En effet, cette suite est bornée puisqu'elle converge vers 0 lorsque $|n| \to \infty$. De plus, on a utilisé

$$\frac{1}{|n|^m} \leq \frac{2}{1 + |n|^m}.$$

Exercice 2. (12pts) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(1) \neq 0$. On pose $C = \log(f(1))$. On suppose que $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = e^{Cx}$

a) en supposant que f est continûment dérivable et en utilisant le théorème fondamental du calcul;

b) en supposant seulement que f est dérivable et en utilisant la dérivée;

c) en supposant seulement que f est continue.
Indice pour le c). Considérez d'abord le problème pour les x rationnels.

Solution. a) On dérive l'équation $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à y et on évalue en $y = 0$ pour obtenir

$$f'(x) = f'(0)f(x).$$

Ensuite, si x est tel que $f(x) = 0$, alors pour tout y, on a $f(1+x-x) = f(1)f(x)f(-x) = 0$, ce qui est une contradiction. Ainsi, on peut diviser l'équation précendente par $f(x)$ et intégrer

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t = \int_0^x f'(0)\mathrm{d}t = f'(0)x,$$

c'est-à-dire que $\log(f(x)) - \log(f(0)) = f'(0)x$.

On remarque que $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$ et puisque $f(0) \neq 0$, on doit avoir $f(0) = 1$.

On conclut que $f(x) = e^{f'(0)x}$. Enfin, pour voir que $f'(0) = \log(f(1))$, il suffit d'évaluer en $x = 1$: on trouve $f(1) = e^{f'(0)}$.

b) Il faut s'inspirer de la propriété vue en classe : e^{Cx} est l'unique solution de l'équation $y' = Cy$. On pose

$$h(x) = \frac{f(x)}{e^{Cx}}.$$

On a

$$h'(x) = \frac{f'(x)e^{Cx} - Cf(x)e^{Cx}}{e^{2Cx}}.$$

Puisque $f'(x) = f'(0)f(x) = Cf(x)$, on voit que $h' = 0$. Ainsi, h est une constante et comme $h(0) = \frac{f(0)}{e^0} = 1$, on trouve $f(x) = e^{Cx}$.

c) Pour un entier n, on a $f(n) = f(1)^n$. Ensuite, on a $f(1) = f(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})^n$, donc $f(\frac{1}{n}) = f(1)^{\frac{1}{n}}$. Ainsi, on voit que $f(x) = f(1)^x$ pour tout x rationnel. Puisque f est continue et que les rationnels sont denses dans les réels, l'équation est vraie pour x irrationnel. Enfin, on a $f(1)^x = e^{x \log(f(1))} = e^{Cx}$, comme voulu.

Exercice 3. (8pts) Montrer que le logarithme n'est pas une fonction rationnelle sur $(0, \infty)$. *Indice*. Que pouvez-vous dire de $\frac{\log x}{x^\varepsilon}$ pour différentes valeurs de ε?

Solution. On suppose que $\log(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes. Puisque $\log x \to \infty$ lorsque $x \to \infty$, il faut que le degré de P soit strictement plus grand que celui de Q.

Ensuite, comme pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\varepsilon} = 0,$$

il suit que $\deg P \leq \deg Q + \varepsilon$. Comme cela est vrai pour tout ε, on en déduit que $\deg P \leq \deg Q$. Cela contredit le fait que $\deg P > \deg Q$.

Exercice 4. (8pts) Calculer les limites suivantes *sans* utiliser la règle de l'Hôpital. Le c) est en bonus.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} \log\left(1 + \tfrac{1}{x}\right)$ c) $\displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} n \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\log n}$ (Bonus 4pts)

Solution. a) D'abord, on a

$$e^{x^2} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} - 1 = o(x) \qquad \text{et} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + o(x).$$

Ainsi, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{o(1)}{1 + o(x)} = 0.$$

b) On a

$$\log(1 + \tfrac{1}{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx^n} = \frac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x}).$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} \log\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + o(\tfrac{1}{\sqrt{x}}) = 0.$$

c) On a

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in N}} n \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\log n} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in N}} \frac{e^{\frac{1}{n}\log n} - 1}{\log n/n} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in n}} \frac{1}{\log n/n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log n/n)^k}{k!} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log n/n)^{k-1}}{k!}$$

et puisque $\log n/n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et que la série converge uniformément, on conclut que la limite vaut 1.

Ne paniquez pas à la vue de cette question! L'énoncé est long, mais prenez quand même le temps de respirer et de le lire attentivement.

Exercice 5. (8pts) (Théorème d'approximation de Weierstrass[1]). Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et régulière par morceaux. Le but est de montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$. On pose

$$g(x) = \begin{cases} f(|x|), & \text{si } x \in [-1,1]; \\ f(1), & \text{si } x \in [-\pi,\pi] \setminus [-1,1]; \end{cases}$$

$$a_k := a_k(g),$$

$$\text{et} \qquad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx).$$

Indication. Le a) et le b) sont indépendants, c'est-à-dire qu'on n'utilise pas le a) pour faire le b). Le c) combine le a) et le b).

a) Montrer que pour tout ε, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors

$$\sup_{[0,1]} |s_n - f| < \varepsilon.$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour chaque k, il existe $m(k) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!} - \cos(kx) \right| < \frac{\varepsilon}{2^k |a_k|}$$

c) On pose

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!}.$$

Montrer que si $n \geq N$, alors

$$\sup_{x\in[0,1]} |P_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Solution. a) D'abord, g est continue, puisque f l'est et qu'en 1 et -1, on a $\lim_{x\to\pm1} g(x) = g(\pm1)$. De plus, g est périodique. Enfin, g est régulière par morceaux, puisque f l'est. Ainsi, la série de Fourier de g converge uniformément vers g sur $[-\pi,\pi]$.

Puisque g est paire, on sait que $b_n = 0$ pour tout n, donc s_n est la série de Fourier de g. On a donc

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sup_{[0,1]} |s_n - g| = \lim_{n\to\infty} \sup_{[0,1]} |s_n - f|,$$

ce qui montre le a).

b) On a

$$\cos(kx) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!}$$

et la convergence de cette série est uniforme sur $[0,1]$. Ainsi, il existe $m(k) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{[0,1]} \left| \sum_{j=m(k)}^{\infty} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!} \right| < \frac{\varepsilon}{2^k |a_k|},$$

qui est ce que l'on voulait montrer.

[1] Le théorème est vrai pour f continue, mais on suppose que f est régulière par morceaux pour cet exercice.

c) D'abord, on voit que

$$\begin{aligned}
|P_n - s_n| &= \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!} - \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \left| \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!} - \cos(kx) \right| \\
&< \sum_{k=1}^{n} |a_k| \frac{\varepsilon}{2^k |a_k|} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|P_n(x) - f(x)| \leq |P_n(x) - s_n(x)| + |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon$$

pour tout $x \in [0, 1]$, comme voule.