Analyse 2

Notes de cours faites par Jonathan Godin*

> *Si l'on demandait à quoi pouvait conduire l'infini, la seule réponse acceptable était : « À n'importe quoi. »*
>
> — Frank Herbert, dans *Dune la maison des mères,* (traduit par Robert Laffont)

Table des matières

* Ces notes sont en grande partie inspirées de mes notes prises en classe au cours d'analyse 2 donné par Thomas Ransford à l'Université Laval à l'automne 2012.

31/8/2022

Introduction

Ce document constitue les notes de cours pour le cours d'analyse 2 à l'Université de Montréal. Ce texte traite de l'analyse des fonctions d'une variable réelle et fait suite à la matière du cours d'analyse 1. Le premier chapitre complète le calcul différentiel et intégral. Les autres chapitres sont plutôt axés sur la théorie des fonctions, plus précisément la notion de suite de fonctions et des différentes convergences, des liens entre la dérivée, l'intégral et la limite et les séries de fonctions et, enfin, la décomposition d'une fonction en une série de Fourier.

Idée inspirée du TeXbook, les paragraphes comme celui-ci, précédés d'un sinus du topologue, contiennent des remarques ou des explications qui peuvent être ignorées lors d'une première lecture. Ils sont composés en taille 10pt, donc on peut facilement savoir où se termine le passage. Ces sections seront étiquetés ainsi pour l'une des raisons suivantes : des outils qui ne sont pas supposés maîtrisés pour le cours sont utilisés, le raisonnement devient un peu plus difficile à suivre (c'est ce qui a inspiré le symbole), le contenu s'éloigne un peu trop de la discussion ou du cadre du cours, un exercice plus difficile.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1. Retour sur la continuité uniforme

On rappelle ici la notion de continuité. On verra aussi la continuité uniforme.

Pour toute la section, on considère $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle (borné ou non) et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1.1.1. (Continuité) On dit que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *continue en* $x_0 \in I$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, on a

$$|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

On dit que f est *continue* si f est continue pour tout $x \in I$.

****

Définition 1.1.2. (Continuité uniforme) On dit $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in I$, on a

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

****

Exemple 1.1.1. Soit $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Elle est bien sûre continue. Pour voir qu'elle n'est pas uniformément continue, on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ensuite, on considère $0 < \delta < \frac{1}{2}$ quelconque (si $\delta \geq \frac{1}{2}$, il suffit de prendre $x = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{2}$ pour obtenir une contradition). On restreint x à l'intervalle $(0, \frac{3}{4})$ et on pose $y = x + \frac{\delta}{2}$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \\
&= \left|\frac{x-y}{xy}\right| \\
&= \frac{\delta}{2}\frac{1}{|x(x+\frac{\delta}{2})|} \\
&\geq \frac{\delta}{2}\frac{1}{|x|}\frac{1}{(1+\frac{\delta}{2})}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $x < \frac{\delta}{1+\frac{\delta}{2}} < \frac{1}{2}$ on obtient

$$|f(x) - f(y)| > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

On conclut que f n'est pas uniformément continue.

Le problème de ce contre-exemple est que quand x tend vers 0^+, f tend vers l'infinie. En fait, on a une réciproque partielle.

Théorème 1.1.3. *Soit $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si les limites*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b^-} f(x)$$

existent, alors f est uniformément continue.

En particulier, si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle compact $[a,b]$, alors f est uniformément continue.

La continuité uniforme sera fort utile pour déterminer l'intégrabilité d'une fonction.

Enfin, on rappelle les résultats suivants concernant les fonctions continues.

Théorème des valeurs intermédiaires 1.1.4. (TVI) *Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ et pour tout c tel que $f(x) < c < f(y)$ ou $f(y) < c < f(x)$, il existe z tel que $x < z < y$ et $f(z) = c$.*

Théorème 1.1.5. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si I est un intervalle compact, alors f atteint son maximum et son minimum. En particulier, f est bornée.*

1.2. Retour sur la dérivée d'une fonction

On rappelle que f est *dérivable* en $x \in I$ si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe. Dans ce cas, on la note $f'(x)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$. On dit que f est dérivable si f est dérivable pour tout $x \in I$.

On étend la notion de dérivée aux intervalles fermés. Si f est définie sur un intervalle de la forme $[a, b)$ ou $[a, b]$, on définit la dérivée à gauche par

$$f'(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

lorsque la limite existe. La limite à droite, sur un intervalle de la forme $(a, b]$ ou $[a, b]$ se définit de façon analogue.

Si on dit que f est dérivable, cela veut dire que f est dérivable en tout $x \in I$, y compris à droite ou à gauche si l'intervalle inclut l'une de ses extrémités.

La définition de la dérivée est équivalente à l'affirmation suivante : il existe $L \in \mathbb{R}$ et une fonction r telle que $r(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$ et

$$f(x+h) = f(x) + Lh + r(h)h.$$

Dans ce cas, f est dérivable et $f'(a) = L$. Cela se généralise de la façon suivante.

Théorème des développements limités 1.2.1. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$, soit $n \geq 1$ et on suppose que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \varepsilon(h) h^n,$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Un résultat important des fonctions dérivables est le suivant.

Théorème des accroissements finis 1.2.2. *(TAF) Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b), alors il existe $\xi \in (a,b)$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Corollaire 1.2.3. *Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continument dérivable, alors pour tout $a < b$ dans I, il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $a \leq x \leq y \leq b$, on a*

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|.$$

Le théorème des accroissements finis se généralise par le théorème de Taylor.

Théorème de Taylor 1.2.4. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I. Soit $a \in I$ et h tel que $a+h \in I$. Alors il existe ξ entre a et $a+h$ tel que*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + \tfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)h^{n+1}.$$

1.3. Classes de fonctions dérivables

Cette section est optionnelle. La matière n'est pas nécessairement difficile, c'est plutôt une question de temps.

Définition 1.3.1. Soit I un intervalle (borné ou non).

1. On définit l'ensemble $C^0(I)$ par
$$C^0(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\}.$$
2. On définit l'ensemble $C^1(I)$ par
$$C^1(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable et } f' \text{ est continue}\}.$$
3. Pour $n \geq 2$, on définit
$$C^n(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable et } f' \in C^{n-1}(I)\}.$$
4. On définit l'ensemble $C^\infty(I)$ par
$$C^\infty(I) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I).$$

Lorsque $f \in C^n(I)$, on dit que f est *de classe C^n*.

****

Autrement dit, $C^n(I)$ est l'espace des fonctions n-fois dérivables dont la dérivée n-ième est continue. L'ensemble $C^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivable. Si I est un intervalle, c'est un ensemble non vide, puisque les fonctions constantes en font partie.

Il en va de soi que l'on a les inclusions suivantes

$$C^\infty(I) \subset \cdots \subset C^n(I) \subset \cdots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I).$$

De plus, les inclusions sont strictes, puisque la fonction $f(x) = (\max\{0,x\})^n$ est $n-1$-fois dérivable, mais pas n-fois.

Les ensembles $C^n(I)$ forment un espace vectoriel pour chaque $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. En effet, si $f, g, h \in C^n(I)$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

(1) $\alpha f \in C^n(I)$;
(2) $\alpha f + \beta g \in C^n(I)$;
(3) $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$.

Quelle est alors la dimension de l'espace? En fait, il s'agit d'un espace de dimension *infinie*. L'espace est donc plus difficile à cerner, puisqu'on ne peut pas facilement utiliser une base et des matrices pour travailler. Par exemple, pour $x \in I$, on peut définir une application linéaire $L_x \colon C^n(I) \to \mathbb{R}$ par

$$L_x(f) = f(x),$$

mais cette application ne se représente pas par une matrice.

Exemple 1.3.1. 1. $f(x) = \frac{1}{x}$ est de classe $C^\infty(0, \infty)$.
2. $g(x) = |x|$ est de classe $C^0(\mathbb{R})$ et de classe $C^\infty(0, \infty)$.
3. un polynôme est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1.4. Petit o et grand O

On utilisera la notation du petit o de Landau.

Définition 1.4.1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit r et h deux fonctions définies sur un voisinage de a. On dit que r est *un petit $o(h(x))$ lorsque $x \to a$* (dit « petit o de h ») si

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{h(x)} = 0.$$

Par abus de notation, on écrit parfois $r(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$. Lorsque le contexte est clair, on écrira simplement $r(x) = o(h(x))$.

****

L'exemple suivante illustre un peu mieux comment cette notation sera utile.

Exemple 1.4.1. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h), \qquad (*)$$

pour tout $|h|$ assez petit. Dans ce cas, on a $f'(x_0) = A$.
Démonstration. On suppose que f est dérivable. Dans ce cas, on pose

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h,$$

où h est assez petit pour que f soit définie en $x_0 + h$. On voit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

et donc r est un $o(h)$. Ainsi, l'équation $(*)$ est vérifiée avec $A = f'(x_0)$.

Maintenant, on suppose qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $(*)$ est vraie. On a alors

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A + \frac{o(h)}{h}.$$

Lorsque $h \to 0$, le côté droit converge vers A, donc le côté gauche converge également. Ainsi, on a bien que $f'(x_0)$ existe et $f'(x_0) = A$. $\square$

En fait, cet exemple s'applique aussi aux développements limités.

Exercice 1. Développements limités. Montrer que si f est n-fois dérivable en x_0, alors

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

Proposition 1.4.2. *La notation du petit o vérifie les propriétés suivantes :*

1. *si $g = o(f)$ et $h = o(f) + o(g)$, alors $h = o(f)$;*
2. *Si $h = fo(g)$, alors $h = o(fg)$.*

La prochaine notation est celle du grand O. Elle est particulièrement utile en informatique, pour l'analyse d'algorithme.

Définition 1.4.3. 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f, g\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On dit que f est *un grand $O(g(x))$ lorsque $x \to \infty$* s'il existe $M \geq a$ et $C > 0$ tels que pour tout $x \geq M$, on a

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0. On dit que f est un *grand $O(g(x))$ lorsque $x \to x_0$* s'il existe $C, m > 0$ tel que si $|x - x_0| < m$, alors on a

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

****

Lorsque le contexte est clair, on ne précisera pas vers quelle valeur x tend. On commence par le cas où $x \to \infty$.

Exercice 2. Soit $f, g\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ deux fonctions. Montrer que si

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

Ensuite, on s'attarde au grand O lorsque $x \to a$. Voici des exemples.

Exercice 3. Soit $a > 0$ et $f, g\colon (-a, a) \to (0, \infty)$. Montrer que si la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

On a vu que le petit o est intimement lié aux développements limités. Le grand O est quant à lui lié au développement de Taylor.

Théorème 1.4.4. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur I. Alors pour $|h|$ assez petit, on a*
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + O(h^{n+1}).$$

Comment cette notation est-elle utile en informatique? Lorsqu'on analyse un algorithme, il est important de savoir si l'algorithme effectue un grand nombre d'opérations. Comme il est bien trop difficile de calculer explicitement ce nombre, on utile des ordres de grandeur. C'est là où la notation grand O est utile.

Exemple 1.4.5. On considère le programme suivant qui permet de determiner si un nombre x appartient à une liste ordonnée L de nombres*.

> **Fonction chercher x dans L.**
> Soit x un nombre et $L = (x_1, \ldots, x_n)$ une liste ordonnée de nombres de longueur n.
> 1. Choisir $a \leftarrow 1$ et $b \leftarrow n$.
> 2. **Tant que** $a \leq b$:
>   choisir $m \leftarrow \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$.
>   **Si** $x = x_m$,
>   **renvoyer** m,
>   **sinon si** $x < x_m$,
>   choisir $b \leftarrow m - 1$,
>   **sinon si** $x > x_m$,
>   choisir $a \leftarrow m + 1$.
> 3. **Renvoyer** $\emptyset$. `// Si on se rend ici, on n'a rien trouvé.`

Le but de l'exemple n'est pas de vérifier que l'algorithme fonctionne, mais plutôt de vérifier qu'il est *efficace*. On détermine l'efficacité en fonction de la longueur de la liste n.

* Le pseudo-code est inspiré de la documentation de Python.

On définit une fonction $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ comme suit : $f(n)$ désigne le nombre d'opérations effectuer pour accomplir l'algorithme pour une liste L de longueur n dans le cas où la recherche est la plus longue possible. Calculer f explicitement serait bien trop difficile, voire imposible. Au lieu, on montre que $f(n) = O(\log n)$ lorsque $n \to \infty$.

L'idée est la suivante : la boucle de l'étape 2 peut s'effectuer au plus $\lfloor \log_2 n \rfloor + 2$ fois, car à la j-ième itération, on voit que

$$b - a \leq \frac{n+1}{2^j}$$

et pour $j = \lfloor \log_2 n \rfloor + 2$, on a

$$2^j = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 + 1} = 2 \cdot 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} \geq 2 \cdot 2^{\log_2 n} = 2n.$$

Ainsi, il s'ensuit que

$$b - a \leq \frac{n+1}{2^j} \leq \frac{n+1}{2n} < 1,$$

donc $b = a$ puisque b et a sont entiers.

Ensuite, si à chaque fois que l'on exécute la boucle, on effectue au plus C opérations, on obtient la borne

$$f(n) \leq C(\lfloor \log_2 n \rfloor + 2) + D,$$

où D est le nombre d'opérations effectuées dans les autres étapes à l'extérieur de la boucle et qui ne dépend pas de n. Ceci montre que $f(n) = O(\log_2 n)$. Enfin, puisque $\log_2 n = \frac{\log n}{\log 2}$, on a également $f(n) = O(\log n)$.

Habituellement, on dit qu'un algorithme est efficace lorsque le nombre d'opérations est de l'ordre d'un grand O(polynôme) dans la dimension qui croît (dans l'exemple précédent, cette dimension est la longueur de la liste). Si l'ordre de grandeur est un grand $O(\log n)$, c'est encore mieux!

1.5. Fonctions élémentaires

Au chapitre 5, on verra les propriétés des fonctions transcendantes importantes. En attendant, on tient pour acquis l'existence et les propriétés des fonctions suivantes. Ces fonctions seront souvent utilisées dans les exemples, mais jamais dans les démonstrations, de sorte qu'il n'y ait à aucun moment un argument circulaire.

Fonction	Dérivée	Primitive	Propriétés	Valeurs spéciales
$\exp x$	$\exp x$	$\exp x$	$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$	$\exp(0) = 1$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x \log x - x$	$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$	$\log e = 1$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ etc.	$\sin 0 = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1,$ etc.
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	voir sin	$\cos 0 = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0,$ etc.
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\log(\sec x)$	$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ etc.	$\tan 0 = 0, \tan \frac{\pi}{4} = 1$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	trop compliqué	voir tan	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$	$\arcsin 0 = 0$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$		

1.6. Échanger l'ordre des limites

Cette section est optionnelle.

Il arrive parfois qu'une suite dépend d'un paramètre. Par exemple,

$$a_{mn} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m$$

dépend de l'indice $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$. Dans un tel cas, il est naturel de se demander si

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{mn} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{mn}.$$

Dans le cas présent, on voit que l'égalité ne tient pas, même si $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{mn}$ converge. Ceci rend le résultat suivant d'autant plus surprenant.

Théorème (de la convergence monotone (pour les séries)) **1.6.1.** *Soit $a\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$ une suite positive, où $a(m)$ représente a_m. Soit $b_n\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$ une suite de suites positives telle que $b_n(m) \leq b_{n+1}(m)$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$. Si $b_n(m) \to a(m)$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_n(m) = \sum_{m=1}^{\infty} a(m).$$

Corollaire 1.6.2. (Théorème de Fubini (pour les séries)) *Soit* $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *une suite à deux indices. Si* $\sum_m \sum_n a_{m,n}$ *converge absolument, alors* $\sum_n \sum_m a_{m,n}$ *converge absolument* *et*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

Comme le montre l'exemple $a_{mn} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{n}}$, il n'y a pas d'équivalent au théorème de Fubini pour les suites. En effet, la double suite (a_{mn}) est positive et les deux limites

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn} = 1$$

convergent, mais elles ne sont pas égales, donc on ne peut pas échanger l'ordre des limites.

> *De façon général, échanger l'ordre de limites est un processus délicat que l'on peut seulement effectuer sous des conditions très précises.*

La continuité et la dérivation sont des processus limites. Une bonne partie du cours sera dédiée à déterminer s'il est possible ou non d'échanger l'ordre des limites.

Morale : Il est important que la double série converge absolument. Même si $\sum_m \sum_n a_{mn}$ et $\sum_n \sum_m a_{mn}$ convergent toutes les deux, cela n'est pas suffisant pour avoir égalité.

Chapitre 2

Calcul intégral

2.1. Définition de l'intégrale de Riemann

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Le but est donner un sens précris à la notion « d'aire sous la courbe ». Pour ce faire, on introduit quelques définitions.

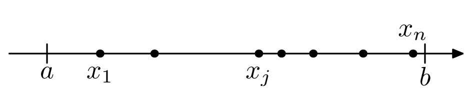
Définition 2.1.1. Une *subdivision* (partition) de $[a,b]$ est un sous-ensemble fini

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

de $[a,b]$ tel que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

****

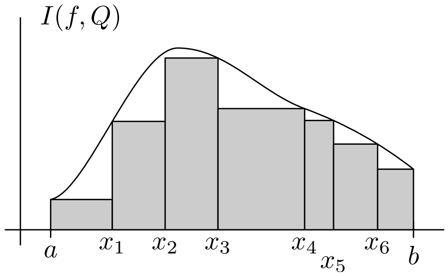


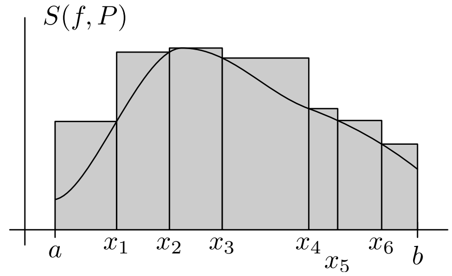
Définition 2.1.2. (Sommes de Darboux). Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ une partition de $[a,b]$. Alors on définit

$$S(f,\mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \qquad \text{où } M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

$$I(f,\mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \qquad \text{où } m_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f.$$

****





Lemme 2.1.3. *(de raffinement). Soit P et Q deux partitions de $[a,b]$. Si $P \subseteq Q$, alors*

$$I(f,P) \le I(f,Q) \qquad \text{et} \qquad S(f,P) \ge S(f,Q).$$

Lemme 2.1.4. *Pour toutes subdivisions P, Q, on a $I(f,P) \le S(f,Q)$.*

Définition 2.1.5. On définit l'*intégrale supérieure* et *inférieure* respectivement par

$$\overline{\int_a^b} f := \inf_P \{S(f,P)\} \qquad \text{et} \qquad \underline{\int_a^b} f := \sup_P \{S(f,P)\},$$

où l'infimum et le supremum sont pris sur toutes les subdivisions P possibles de $[a,b]$.

****

Lemme 2.1.6. $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

Définition 2.1.7. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Elle est *intégrable* (au sens de Riemann) si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Dans ce cas, on note la valeur commune $\int_a^b f$ (ou $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$).

****

Remarque. De façon équivalente, f est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition P de $[a,b]$ telle que $|S(f,P) - I(f,P)| < \varepsilon$. (Exercice.)

****

Remarque. Cet exemple démontre que l'aire sous la courbe d'une droite horizontale correspond bien à l'aire d'un rectangle.

****

2.2. Propriétés de l'intégrale

1. Soit $a < c < b$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

2. Si f, g sont intégrables sur $[a, b]$, alors $f + g$ l'est aussi et

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

3. Si f est intégrable sur $[a, b]$, et si $c \in \mathbb{R}$, alors cf est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b cf = c\left(\int_a^b f\right).$$

4. Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

21

Inégalité triangulaire

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

2.3. Intégrabilité des fonctions continues

Théorème 2.3.1. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors elle est intégrable.*

On rappelle que si f est continue sur $[a,b]$, alors f est bornée et f est uniformément continue.

La fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \in (0,1], \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est-elle intégrable?

La réponse est oui, mais on ne peut pas faire appelle au théorème précédent.

Corollaire 2.3.2. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, sauf en un nombre fini de points, et si f est bornée, alors f est intégrable.*

2.4. Théorème fondamental du calcul

Théorème fondamental du calcul 1. *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On définit* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *par*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Alors F *est dérivable et* $F'(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in [a,b]$.

Théorème fondamentale du calcul 2. *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Soit* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable telle que* $F' = f$*. Alors*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Remarque. La fonction F s'appelle une *primitive* de f. Selon le TFC1, une primitive existe toujours (lorsque f est continue) et selon le TFC2, une primitive est unique à l'addition d'une constante près. Souvent, on écrit $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.

****

2.5. Techniques d'intégration

1. Intégration par partie

Soit $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables avec u', v' continues. Alors

$$\int_a^b uv' = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b vu'.$$

2. Intégration par substitution

Soit $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g\colon [a,b] \to [c,d]$ une fonction continue, dérivable et avec g' continue. Alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}x.$$

Remarque. Si $g(a) > g(b)$, alors il faut interpreter

$$\int_{g(a)}^{g(b)} = -\int_{g(b)}^{g(a)}.$$

****

3. Simplication algébrique

Exemple 2.5.1.
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{u-1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u && \begin{aligned} u &= x+1 \\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x \end{aligned}\\ &= \int_1^2 (u^{1/2} - u^{-1/2})\mathrm{d}u \\ &= \left[\tfrac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\right]_1^2 \\ &= \tfrac{4}{3} - \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

4. Simplication trigonométrique

Exemple 2.5.2.
$$\begin{aligned}\int \cos x \cos(2x)\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x + \cos(3x)}{2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin(3x)}{6}.\end{aligned}$$

5. Fractions partielles

Exemple 2.5.3.
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-1)} \\ &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+1)\end{aligned}$$

2.6. Intégrales impropres

2.6.1 Intégrales de fonctions non bornées

La définition de $\int_a^b f$ prend pour acquis que f soit bornée sur $[a,b]$. Il arrive parfois que f est bornée sur $[a+\varepsilon, b]$ pour chaque $\varepsilon > 0$, mais pas sur $[a,b]$ lui-même. Dans ce cas, on peut considérer $\int_{a+\varepsilon}^b f$ si elle existe et si

$$\int_{a+\varepsilon}^b f \to \ell \qquad \text{lorsque } \varepsilon \to 0^+,$$

alors on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f$ converge et on écrit

$$\int_a^b f = \ell.$$

(De même, si la singularité est en b, alors on considère $\int_a^{b-\varepsilon} f$ lorsque $\varepsilon \to 0$.)

Remarque. Si une fonction f est définie sur $[a,b) \cup (b,c]$, il se peut que la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^c f \right)$$

existe même si les intégrales impropres $\int_a^b f$ ou $\int_b^c f$ divergent. Dans ce cas, on écrit

$$\text{v.p.} \int_a^c f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^c f \right).$$

On appelle v.p. $\int_a^c f$ la *valeur principale* de $\int_a^c f$.

****

2.6.2 Intégrales sur des intervalles semi-infinis

On suppose que $\int_a^x f$ existe pour tout $x \geq a$. Si

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f = \ell,$$

alors on dit que l'intégrale impropre $\int_a^\infty f$ converge et on écrit

$$\int_a^\infty f = \ell.$$

(De même pour $\int_{-\infty}^a f$ en considérant $\int_x^a f$ lorsque $x \to -\infty$.)

2.6.3 Intégrales sur tout l'axe réel

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que $\int_{-\infty}^\infty f$ converge si les deux intégrales $\int_0^\infty f$ et $\int_{-\infty}^0 f$ convergent toutes les deux. Dans ce cas, on écrit

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f.$$

Remarques. 1. Au lieu de faire la séparation en 0, on peut la faire en tout point $a \in \mathbb{R}$. Cela ne change ni la convergence, ni la valeur.

2. Il se peut la limite

$$\lim_{y\to\infty} \int_{-y}^y f$$

existe même si $\int_{-\infty}^{\infty} f$ diverge. Dans ce cas, on écrit

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{y} f.$$

On appelle v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} f$ la *valeur principale* de $\int_{-\infty}^{\infty} f$.

****

2.6.4 Tests de convergence pour les intégrales impropres

1. Le test de comparaison

Soit $f, g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Supposons que

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

pour tout $x \geq a$. Si $\int_a^\infty g$ converge, alors $\int_a^\infty f$ converge aussi. (Donc si $\int_a^\infty f$ diverge, alors $\int_a^\infty g$ diverge aussi.)

2. La convergence absolue implique la convergence

Soit $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\int_a^\infty |f|$ converge, alors $\int_a^\infty f$ converge aussi.

On revient maintenant à l'exemple

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

On note que

$$\left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

et on sait que $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.

Par le test de comparaison, on conclut que

$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| \mathrm{d}x$$

converge. Comme la convergence absolue implique la convergence, il suit que

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

converge également.

Enfin, on a

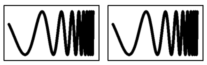
$$\begin{aligned}\int_0^y \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_1^y \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &\longrightarrow \int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Remarque. Montrer la convergence de $\int_a^\infty f$ et trouver sa valeur sont deux problèmes différents. En général, le deuxième est plus difficile. En fait, on peut montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2e}$$

par des techniques de l'analyse complexe.

****



Les intégrales complexes peuvent parfois être évalué à l'aide de leurs *résidus*. Le prochain calcul n'a aucun lien avec la matière du cours. On pose

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2},$$

une fonction de la variable complexe $z = x + iy$. Lorsque $y = 0$, on trouve

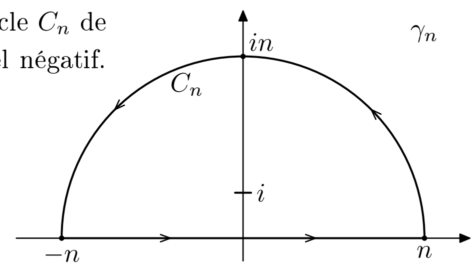
$$f(x) = \frac{e^{ix}}{1+x^2} = \frac{\cos x}{1+x^2} + \frac{i\sin x}{1+x^2}.$$

Cette fonction possède un résidu en $z = i$ et $z = -i$. On s'intéresse seulement à celui en i, puisqu'on intégrera seulement autour de ce résidu. Dans notre cas, le résidu se calcule par

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Soit γ_n le lacet composé de l'intervalle $[-n,n]$ et du demi-cercle C_n de rayon n, centré en 0 partant de l'axe réel positif jusqu'à l'axe réel négatif. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, on pose

$$I_n = \int_{\gamma_n}\frac{e^{iz}}{1+z^2}\mathrm{d}z.$$



Contour d'intégration γ_n.

Par le théorème des résidus, on a l'équation

$$I_n = 2i\pi\,\mathrm{Res}(f,i) = \frac{2i\pi}{2ie} = \frac{\pi}{e}.$$

Ensuite, l'intégrale sur le demi-cercle s'approche de 0 lorsque $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_n}\frac{e^{iz}}{1+z^2}\mathrm{d}z\right| &\leq \int_{C_n}\frac{|e^{iz}|}{|1+z^2|}|\mathrm{d}z| \\
&\leq \int_{C_n}\frac{|e^{iz}|}{|z|^2-1}|\mathrm{d}z| \\
&= \int_{C_n}\frac{e^{-y}}{n^2-1}|\mathrm{d}z| \\
&= \int_0^\pi \frac{ne^{-n\sin\theta}}{n^2-1}\mathrm{d}\theta \\
&\leq \frac{n}{n^2-1}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \qquad\qquad (\text{car } e^{-n\sin\theta}\leq 1) \\
&\longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } n\to\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathrm{d}z| &= |\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y| \\
&= |-n\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + in\sin\theta\,\mathrm{d}\theta| \\
&= \sqrt{n^2\cos^2\theta + n^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= n\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

On peut maintenant conclure

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{e} &= \lim_{n\to\infty} I_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\mathrm{d}z \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-n}^{n} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\mathrm{d}z + \int_{C_n} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\mathrm{d}z \right) && \text{(car } \gamma_n \text{ est composé} \\
& && \text{de } C_n \text{ et de } [-n,n]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\mathrm{d}z + 0 && \text{(car } \textstyle\int_{C_n} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\mathrm{d}z \to 0) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\mathrm{d}x && \text{(car } y=0 \text{ sur } [-n,n]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{\cos x + i\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\cos x}{1+x^2}$ est paire et que $\frac{\sin x}{1+x^2}$ est impaire, on a

$$\frac{\pi}{e} = \lim_{n\to\infty} 2\int_0^n \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x + 0.$$

On conclut que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2e}.$$

2.6.5 Le test de l'intégrale pour les séries

La série $\sum\limits_2^\infty \frac{1}{n\log n}$ converge-t-elle? Les tests vu en analyse 1 échouent sur cet exemple. L'intégrale fournit un test plus raffiné.

Test de l'intégrale *Soit $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction (continue) positive et décroissante. Alors*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x \text{ converge.}$$

2.7. Sommes de Riemann

Les sommes $S(f,P)$ et $I(f,P)$ sont appelés *sommes de Darboux*. On présente brièvement le point de vue équivalent de Riemann.

Définition 2.7.1. 1. Soit $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a,b]$. On appelle le tuple $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ un *test* si $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit la *somme de Riemann* $R(f,P,\xi)$ par

$$R(f,P,\xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

3. La *largeur* d'une partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ est

$$\|P\| = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1}).$$

****

Le point 1 de la définition n'est pas standard dans la littérature. On introduit la terminologie d'un test seulement pour alléger le texte.

Remarque. On voit que

$$I(f,P) \leq R(f,P,\xi) \leq S(f,P) \tag{1}$$

pour tout test ξ.

****

Les sommes de Darboux sont plus faciles à utiliser pour la théorie. Pour le calcul numérique, les sommes de Riemann sont probablement plus utiles. De toute façon, une intégrale sera habituellement approximée par une méthode numérique telle la méthode de Simpson.

Théorème d'équivalence des sommes de Darboux et de Riemann 2.7.2. *Soit une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée. Alors f est intégrable si et seulement si f satisfait au critère de Riemann : il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|P\| < \delta$, alors*

$$|R(f,P,\xi) - S| < \varepsilon$$

pour tout test ξ. Dans ce cas, on a $S = \int_a^b f$.

On voit que le théorème porte sur les fonctions bornées. Si f vérifie le critère de Riemann, elle est automatiquement bornée, donc on ne perd pas généralité. En effet, si f n'était pas bornée, pour une partition P telle que pour tout test ξ, on a $|R(f,P,\xi) - S| < \varepsilon$, on pourrait choisir une suite (ξ_n) de sorte que $R(f,P,\xi_n) \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, ce qui est une contradiction.

Lemme 2.7.3. *Si f est intégrable, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition P, on ait*

$$\text{si } \|P\| < \delta, \text{ alors } S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $P_\varepsilon = \{y_0, \dots, y_d\}$ telle que
$$S(f, P_\varepsilon) - I(f, P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ une partition telle que $\|P\| < \delta$, où δ sera déterminé plus tard. Pour $0 \leq j \leq d$, on définit $\{z_\ell^j\}_\ell$ de sorte que
$$P \cup \{y_0, \dots, y_j\} = \{z_0^j, \dots, z_{n+j}^j\}$$
et on pose
$$M_\ell^j = \sup_{[z_{\ell-1}^j, z_\ell^j]} f \qquad \text{et} \qquad M = \sup_{[a,b]} f.$$

La suite est un peu technique, donc allons-y avec soin. Il existe k tel que $y_{j+1} \in [z_{k-1}^j, z_k^j]$. Il s'ensuit que

- pour $\ell < k$, on a $z_\ell^{j+1} = z_\ell^j$;
- pour $\ell = k$, on a $z_k^{j+1} = y_{j+1}$;
- pour $\ell > k$, on a $z_\ell^{j+1} = z_{\ell-1}^j$.

On compare maintenant les sommes supérieures avec $P \cup \{y_0, \dots, y_j\}$ et $P \cup \{y_0, \dots, y_{j+1}\}$. On a
$$\begin{aligned}
S(f,&P \cup \{y_0, \dots, y_j\}) \\
&- S(f, P \cup \{y_0, \dots, y_{j+1}\}) = \sum_{\ell=1}^{n+j} M_\ell^j (z_\ell^j - z_{\ell-1}^j) - \sum_{\ell=1}^{n+j+1} M_\ell^{j+1} (z_\ell^{j+1} - z_{\ell-1}^{j+1}) \\
&= \sum_{\ell=k}^{n+j} M_\ell^j (z_\ell^j - z_{\ell-1}^j) - \sum_{\ell=k}^{n+j+1} M_\ell^{j+1} (z_\ell^{j+1} - z_{\ell-1}^{j+1}) \\
&= M_k^j (z_k^j - z_{k-1}^j) - M_k^{j+1} (y_{j+1} - z_{k-1}^j) - M_{k+1}^{j+1} (z_k^j - y_{j+1}) \\
&\leq M (z_k^j - z_{k-1}^j) \\
&\leq M\delta.
\end{aligned}$$

De même, on a
$$I(f, P \cup \{y_0, \dots, y_{j+1}\}) - I(f, P \cup \{y_0, \dots, y_j\}) \leq m\delta.$$

En combinant les sommes inférieures et supérieures et prenant la somme de 1 à d, on trouve
$$\begin{aligned}
S(f, P) &- I(f, P) - S(f, P \cup \{y_0\}) + I(f, P \cup \{y_0\}) \\
&+ \sum_{j=0}^{d-1} \Big[S(f, P \cup \{y_0, \dots, y_j\}) - I(f, P \cup \{y_0, \dots, y_j\}) \\
&\qquad - S(f, P \cup \{y_0, \dots, y_{j+1}\}) + I(f, P \cup \{y_0, \dots, y_{j+1}\}) \Big] \\
&= S(f, P) - I(f, P) - \big(S(f, P \cup P_\varepsilon) - I(f, P \cup P_\varepsilon) \big) \\
&\leq 2M\delta d.
\end{aligned}$$

Autrement dit, on a

$$\begin{aligned} S(f,P) - I(f,P) &\leq 2Md\delta + \big(S(f, P\cup P_\varepsilon) - I(f, P\cup P_\varepsilon)\big) \\ &\leq 2Md\delta + \tfrac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Si on prend $\delta = \frac{\varepsilon}{2dM}$, alors on obtient

$$S(f,P) - I(f,P) \leq \varepsilon$$

tel que voulu.

On notera bien que le δ choisi dépend de ε et de d, mais pas de P. En effet, d est déterminé en fonction ε et indépendemment de P.

$\square$

Démonstration du théorème. On suppose que f est intégrable et on montre qu'elle satisfait le critère de Riemann.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ dont l'existence provient du lemme 2.7.3. Pour toute partition P avec $\|P\| < \delta$ et pout tout test ξ, on a

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq I(f,P) - S(f,P) && \text{(par le lemme 2.7.3)} \\ &\leq R(f,P,\xi) - S(f,P) && \text{(par (1))} \\ &\leq R(f,P,\xi) - \int_a^b f && \text{(car } S(f,P) \geq \textstyle\int_a^b f\text{)} \\ &\leq S(f,P) - \int_a^b f && \text{(par (1))} \\ &\leq S(f,P) - I(f,P) && \text{(car } I(f,P) \leq \textstyle\int_a^b f\text{)} \\ &\leq \varepsilon, && \text{(par le lemme 2.7.3)} \end{aligned}$$

d'où $\left|R(f,P,\xi) - \int_a^b f\right| \leq \varepsilon$. On conclut que f satisfait au critère de Riemann.

Pour la réciproque, on suppose que f satisfait au critère de Riemann et on montre que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit S et δ qui satisfont au critère de Riemann. D'abord, on a que pour toute partition P avec $\|P\| < \delta$ et pour tout test ξ,

$$R(f,P,\xi) \leq S + \varepsilon.$$

Puisque l'inégalité tient pour tout test $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, elle reste vraie lorsque $f(\xi_j) \to \sup_{[x_{j-1},x_j]} f$. Il suit que $S(f,P) \leq S + \varepsilon$. De même, on a $S - \varepsilon \leq I(f,P)$.

Soit ensuite (P_n) une suite de partitions telle que

$$I(f, P_n) \to \underline{\int_a^b} f \qquad \text{et} \qquad S(f, P_n) \to \overline{\int_a^b} f.$$

On a

$$S - \varepsilon \leq I(f, P \cup P_n) \leq S(f, P \cup P_n) \leq S + \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on conclut que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = S$.

□

Chapitre 3

Convergence uniforme

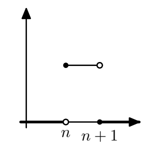
3.1. Convergence simple

Définition 3.1.1. Soit X un ensemble, soit $(f_n)_{n\geq 1} \colon X \to \mathbb{R}$ des fonctions et soit $f \colon X \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement vers f sur X* si, pour chaque $x \in X$, la suite de nombres $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers $f(x) \in \mathbb{R}$.

On écrit également $f_n \to f$ simplement sur X lorsque $n \to \infty$.

****

Exemple 3.1.1. $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [n, n+1), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$



On voit que $f_n(x) = 0$ si $n > x$, donc $f_n \to 0$ simplement sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Ici, $f_n \to 0$ sur $\mathbb{R}$, mais $\int_0^\infty f_n \not\to \int_0^\infty 0$, car $\int_0^\infty f_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

****

Les exemples précédents montrent que bien qu'elle semble naturelle, la convergence simple ne respecte ni la continuité, ni l'intégration, ni la dérivation. Il nous faut un mode de convergence plus fort : la *convergence uniforme*.

3.2. Convergence uniforme

Définition 3.2.1. Soit X un ensemble. Soit $(f_n)_{n\geq 1}\colon X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions et soit $f\colon X \to \mathbb{R}$ une autre fonction. On dit que f_n *converge vers* f *uniformément sur* X si

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

****

Remarque. Si $f_n \to f$ uniformément sur X, alors $f_n \to f$ simplement sur X. Ainsi, pour déterminer si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément :

1. on identifie la limite simple f, si elle existe;
2. on tente de montrer que $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

****

Exemple 3.2.1. $f_n(x) = x^n$ sur $(0, \frac{9}{10})$.

On voit que $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $x \in (0, \frac{9}{10})$. De plus, on a

$$\sup_{x \in (0, \frac{9}{10})} |f_n(x)| = \left(\frac{9}{10}\right)^n \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Donc $x^n \to 0$ uniformément sur $(0, \frac{9}{10})$.

Exemple 3.2.2. $f_n(x) = x^n$ sur $(0, 1)$.

Encore une fois, on voit que $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $x \in (0, 1)$. Par contre, on a

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x)| = 1^n \not\to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Ainsi, f_n ne converge pas uniformément sur $(0, 1)$.

Morale : le domaine est important!

3.3. Convergence uniforme et continuité

Théorème 3.3.1. *On suppose que $f_n \to f$ uniformément sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Si chaque f_n est continue en a, alors f est continue en a.*

Corollaire 3.3.2. *Si $f_n \to f$ uniformément sur I et si chaque f_n est continue sur I, alors f est continue sur I aussi.*

3.4. Convergence uniforme et intégration

Théorème 3.4.1. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné $[a,b]$ et on suppose de plus que $f_n \to f$ uniformément sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f \qquad (n \to \infty).$$

3.5. Convergence uniforme et dérivation

Attention! Même si $f_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$, on n'obtient pas $f_n' \to f'$ (même simplement).

Théorème 3.5.1. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions définie sur un intervalle* I. *On suppose que chaque* f_n *est dérivable et que* f_n' *est continue. On suppose, de plus, que*

(i) $f_n \to f$ *simplement sur* I;

(ii) $f_n' \to g$ *uniformément sur* I.

Alors f *est dérivable sur* I *et* $f' = g$.

3.6. Convergence uniforme des séries

Tout comme pour les séries de nombres, la convergence d'une série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ est définie en termes de la convergence de la suite des sommes partielles

$$f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

Définition 3.6.1. Soit X un ensemble et soit $(u_k)_{k\geq 0}\colon X \to \mathbb{R}$ des fonctions. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

On dit que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ *converge simplement* sur X si la suite (f_n) converge simplement sur X. On dit que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ *converge uniformément* sur X si la suite (f_n) converge uniformément sur X.

****

Les théorèmes déjà vus pour les suites se traduisent facilement en des théorèmes correspondants pour les séries.

Théorème de continuité 3.6.2. *Si $(u_k)_{k\geq 0}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle I et si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformément sur I, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est continue sur I.*

Théorème d'intégration 3.6.3. *Si $(u_k)_{k\geq 0}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle borné $[a,b]$ et si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b u_k \right).$$

Théorème de dérivation 3.6.4. *Soit* $(u_k)_{k\geq 0}$ *une suite de fonctions dérivables sur un intervalle* I *avec* u_k' *continue pour chaque* k. *On suppose, de plus, que*

(i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ *converge simplement sur* I, *et*

(ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k'$ *converge uniformément sur* I.

Alors $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ *est dérivable sur* I *et*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k)'.$$

En principe, la théorie pour les séries est partielle à celle des suites. Cependant, en pratique, il y a une différence importante. Il est souvent difficile, voire impossible, d'identifier explicitement la limite $f(x)$ d'une série, ce qui complique le calcul de $\sup|f(x) - f_n(x)|$ utilisé pour déterminer la convergence uniforme de la série. Il nous faut donc un critère qui nous assure de la convergence uniforme d'une série de fonctions, sans avoir à identifier explicitement la limite. Voici un tel critère.

Le critère de Weierstrass. *Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite de fonction sur X. On suppose qu'il existe des nombres $(M_k)_{k\geq 0}$ tels que*
(i) $|u_k(x)| \leq M_k$ pour tout $k \geq 0$ et $x \in X$, et
(ii) la séries $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ converge.
Alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformément sur X.

Remarque. Le critère de Weierstrass n'est pas une condition nécessaire, comme le montre cet exemple.

****

Exemple 3.6.1. Soit la série
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$
Le critère de Weierstrass est difficile à appliquer dans ce cas, car la série n'est pas absolument convergente. Pourtant, elle converge uniformément sur $[0, \infty)$.

Soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k}$ la suite des sommes partielles. On s'intéresse à calculer
$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f(x) - f_{n-1}(x)|.$$

On a

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{x+k}\right|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}\right|=\left|(-1)^n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-n}}{x+k}\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x+n+k}\right|.$$

Ainsi, les deux premiers termes sont

$$\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}.$$

Les $2k$-ième et $2k+1$-ième termes sont

$$\frac{1}{x+n+2k}-\frac{1}{x+n+2k+1}=\frac{1}{(x+n+2k)(x+n+2k+1)}\leq\frac{1}{(n+2k)^2}\leq\frac{1}{(n+k)^2}.$$

On obtient donc

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x+n+k}\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n+2k}-\frac{1}{x+n+2k+1}\right)\right|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^2}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Puisque c'est une série convergente, on voit qu'elle tend vers 0 lorsque $n\to\infty$. Cela montre que $f_n\to f$ uniformément sur $[0,\infty)$. $\square$

Chapitre 4

Séries entières

Une série entière est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

où les coefficients a_k sont des nombres réels (complexes). On verra que ces séries possèdes des propriétés spéciales qui les rendent presque aussi faciles à manipuler que les polynômes.

4.1. Rayon de convergence

Théorème 4.1.1. *Soit* $\sum_0^\infty a_k x^k$ *une série entière. Alors il existe* R *avec* $0 \leq R \leq \infty$ *tel que*

- $|x| < R \Rightarrow \sum_0^\infty a_k x^k$ *et* $\sum_0^\infty |a_k x^k|$ *convergent;*
- $|x| > R \Rightarrow \sum_0^\infty a_k x^k$ *et* $\sum_0^\infty |a_k x^k|$ *divergent.*

Remarques. 1. Le nombre R s'appelle le rayon de convergence.

2. Le théorème ne dit rien sur ce qui se passe lorsque $|x| = R$. Cela dépend de la série en question.
3. Le rayon de convergence est unique, puisque si $R < R_1$ était un autre rayon de convergence, pour les x tels que $R < |x| < R_1$, la série entière devrait à la fois converger et diverger, ce qui est impossible.

****

4.2. Séries entières et convergence uniforme

Théorème 4.2.1. *Soit* $\sum_0^k a_k x^k$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$*. Alors, pour chaque* $S < R$*, la série* $\sum_0^k a_k x^k$ *converge uniformément sur* $[-S, S]$*.*

Remarque. En général, la convergence n'est pas uniforme sur $(-R, R)$. Par exemple, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{si } |x| < 1$$

et on a vu que $R = 1$. Par contre, on voit que

$$\sup_{x \in (-1,1)} \left| \sum_{k=0}^{n} x^k - \frac{1}{1-x} \right| = \infty$$

pour tout n.

****

Corollaire 4.2.2. *La fonction* $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *est continue sur* $(-R, R)$*.*

Corollaire 4.2.3. *Soit* $\sum_0^{\infty} a_k x^k$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$*. Pour tout* a, b *tel que* $-R < a < b < R$*, on a*

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k x^k.$$

4.3. Dérivation terme à terme des séries entières

Théorème 4.3.1. *Soit* $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors* f *est dérivable sur* $(-R, R)$ *et*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \qquad \text{pour } x \in (-R, R).$$

Lemme 4.3.2. $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ *converge pour tout* x *avec* $|x| < R$ $(R =$ *le rayon de convergence de* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)$.

On peut réappliquer le théorème à la série entière $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$.

Corollaire 4.3.3. *Une série entière $f(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_k x^k$ de rayon de convergence $R > 0$ est infiniment dérivable et pour chaque $n \geq 0$, on a*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) a_k x^{k-n} \quad \text{pour } x \in (-R, R). \tag{$*$}$$

Corollaire 4.3.4. *Sous les mêmes hypothèses,*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Corollaire 4.3.5. *Si $\sum\limits_{0}^{\infty} a_k x^k = \sum\limits_{0}^{\infty} b_k x^k$ pour $x \in (-\delta, \delta)$, où $\delta > 0$, alors $a_k = b_k$ pour tout $k \geq 0$.*

4.4. Fonctions analytiques

Définition 4.4.1. Soit I un intervalle *ouvert* et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *(réelle) analytique* si pour tout $a \in I$, il existe $R > 0$ et (a_n) tels que

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

converge absolument pour tout $|a-x| < R$ et de plus si $|a-x| < R$, alors $f(x) = g(x)$.

****

Les fonctions analytiques généralisent l'idée d'une série entière.

Théorème 4.4.2. *Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est analytique sur $(-R, R)$.*

Les fonctions analytiques possèdent plusieurs propriétés importantes. On ne les montrera pas dans le cours d'analyse 2, car elles seront vues en analyse complexe de toute façon (et les démonstrations seront beaucoup simples et élégantes). En voici tout de même une liste non exhaustive :

1. la somme fini de fonctions analytiques est analytique;
2. le produit fini de fonctions analytiques est analytique;
3. le quotient d'une fonction analytique par une fonction analytique non nulle est analytique;
4. la composée de deux fonctions analytiques est analytique là où la composition est possible.

Ainsi, la plupart des fonctions qu'on est habitué de voir sont analytiques.

Par exemple, la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est analytique sur $(0, \infty)$, puisqu'on a $f(x) = \sqrt{x} = e^{\frac{1}{2}\log x}$, qui est la composition de deux fonctions analytiques sur $(0, \infty)$.

Par contre, il ne faut pas croire que toutes les fonctions qui ont « une jolie expression » sont nécessairement analytiques.

Exemple 4.4.3. La fonction $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$ n'est pas analytique. En effet, on a $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (exercice). Si f était analytique, cela impliquerait que $f(x) = 0$ pour tout x, ce qui est évidemment faux.

Une fonction analytique est infiniment dérivable, mais comment dire si une fonction infiniment dérivable est analytique?

En fait, elles sont caratérisées par le théorème suivant.

Théorème 4.4.4. *Soit f une fonction infiniment dérivable sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Elle est analytique sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, il existe $J \subseteq I$ et $C, R > 0$ tels que $a \in J$ et pour tout $x \in J$ et tout $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on a*

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \frac{n!}{R^n}.$$

Chapitre 5

Fonctions transcendantes

5.1. exp

Définition 5.1.1. $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (Série entière, $R = \infty$)

****

Propriétés de exp.

0. $\exp(0) = 1$

1. exp est dérivable et $\exp'(x) = \exp(x)$
[Dériver terme à terme en utilisant le théorème théorème 4.3.1.]

2. $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$
Dem. On pose $f(x) = \exp(x)\exp(a+b-x)$. On a alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(x)(-1)\exp'(a+b-x) + \exp'(x)\exp(a+b-x) \\ &= -\exp(x)\exp(a+b-x) + \exp(x)\exp(a+b-x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc f est constante. En particulier

$$\begin{aligned} f(0) &= f(a) \\ \underbrace{\exp(0)}_{=1}\exp(a+b) &= \exp(a)\exp(b). \end{aligned} \qquad \square]$$

3. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

4. $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

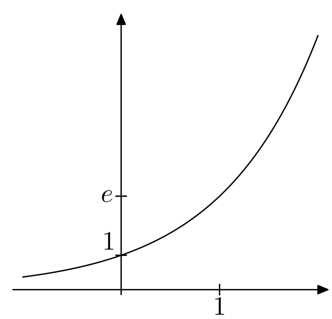
5. exp est strictement croissante.

6. Pour chaque $k \geq 0$,

$$\frac{\exp(x)}{x^k} \to 0 \quad \text{lorsque } x \to \infty.$$

7. $\exp(x) \to \infty$lorsque $x \to \infty$ $\big[$cas particulier de 6$\big]$

$\exp(x) \to 0$lorsque $x \to -\infty$ $\big[\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}\big]$



Graphe de exp

Définition 5.1.2.
$$\begin{aligned} e &:= \exp(1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \\ &\approx 2{,}7128. \end{aligned}$$

****

8. $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

9. Si f est une fonction dérivable et $f'(x) = f(x)$, alors $f(x) = C\exp(x)$, où C est une constante.

5.2. log

Définition 5.2.1. $\log x := \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t \quad (x > 0)$

****

Propriétés de log.

0. $\log(1) = 0$

1. log est dérivable et $\log'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

2. $\log(ab) = \log a + \log b$ pour tout $a, b > 0$.

$$\Big[\log(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^{a} \frac{1}{t}\mathrm{d}t + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \qquad \begin{array}{l} s = \frac{t}{a} \\ \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}t}{a} \end{array}$$

$$= \int_1^{a} \frac{1}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{b} \frac{1}{s}\mathrm{d}s$$

$$= \log a + \log b. \qquad \square\Big]$$

3. $\exp(\log x) = x$ pour tout $x > 0$

$\log(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ et $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sont mutuellement inverses.

Corollaire 5.2.2. $\log(e) = 1$.

4. Pour $a > 0$ et x réel, on a
$$\log(a^x) = x\log(a).$$

5. log est strictement croissante.

$\left[\log'(x) = \frac{1}{x} > 0\right]$

log est concave.

$\left[\log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0\right]$

6. $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$

$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$

7. Pour $\varepsilon > 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\varepsilon} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \log x = 0$.

[La première limite est une forme indéterminée ∞/∞. Par l'Hôpital, on a
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0.$$
Pour la deuxième, on pose $y = \frac{1}{x}$ et on obtient
$$\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \log x = \lim_{y\to\infty} y^{-\varepsilon} \log\left(\tfrac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} -\frac{\log y}{y^\varepsilon} = 0.\,]$$

8. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ si $|x| < 1$.

5.3. cos et sin

Définition 5.3.1. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

****

Ces deux séries entières ont un rayon de convergence $R = \infty$.

Propriétés de cos et sin.

0. $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$

1. cos est une fonction paire ($\cos(-x) = \cos x$) et sin est une fonction impaire ($\sin(-x) = -\sin x$).

2. cos et sin sont dérivables et

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$
$$\sin'(x) = \cos(x).$$

3. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et si $f'' + f = 0$, alors f est la forme $f(x) = A\cos x + B\sin x$, où A, B sont des constantes.

4. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

5. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (prendre $a = x$ et $b = -x$)
$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ (prendre $a = x$ et $b = x$)

6. $|\cos x| \leq 1$
$|\sin x| \leq 1$ pour tout x

Pour étudier la question de la périodicité, on a besoin d'un lemme technique.

Lemme 5.3.2. *Dans* $[0,2]$, *la fonction* $\cos$ *a une unique racine* ω.

Définition 5.3.3. On pose $\pi := 2\omega$, où ω est l'unique racine de cos dans $[0, 2]$.

****

Remarque : $0 < \pi < 4$.

7. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

8. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

[Suit de 4 et 7]

$\cos(x + \pi) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + \pi) = -\sin x$

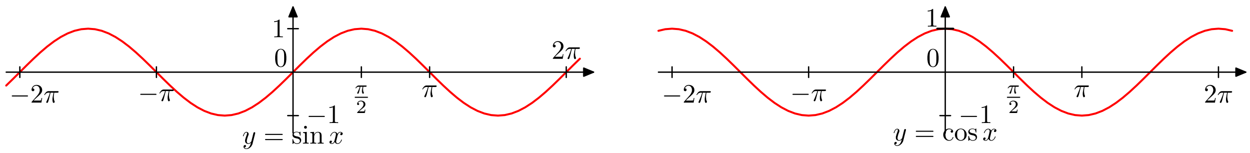
[Appliquer deux fois l'identité précédente]

$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$

[Appliquer deux fois l'identité précédente]

9. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$



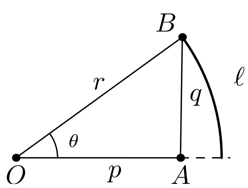
10. Quelques valeurs importantes

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

11. Aire et circonférence d'un disque de rayon r.
L'aire d'un disque de rayon $r = \pi r^2$.
La circonférence d'un disque de rayon $r = 2\pi r$.

12. Trigonométrie. Pour faire de la trigonométrie, il faut définir la notion *d'angle*. Soit O, A, B trois points distincts. On pose

$$p = \overline{OA}, \quad q = \overline{AB} \quad \text{et} \quad r = \overline{OB}.$$



Il est suffisant de considérer le cas où p, q, r vérifie $p^2 + q^2 = r^2$, quitte à remplacer A par A' colinéaire à A de sorte à vérifier l'identité. L'angle ABC est défini comme la longueur de l'arc d'un cercle de rayon 1 centré en B allant B jusqu'à la droite $\vec{OA}$, comme sur la figure. Suivant la figure, on voit que l'angle AOB, noté θ vérifie

$$\theta = \frac{\ell}{r}.$$

Par la formule de longueur d'arc, on a

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_p^r \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_p^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x && \begin{array}{ll} x = r\cos u & x = r \leftrightarrow u = 0 \\ \mathrm{d}x = r\sin u\mathrm{d}u & x = p \leftrightarrow u = \alpha \\ & \text{où } r\cos\alpha = p \end{array} \\
&= \int_\alpha^0 \frac{r}{\sqrt{r^2 - r^2\cos^2 u}}(-r\sin u)\mathrm{d}u \\
&= \int_\alpha^0 -r\mathrm{d}u = r\alpha.
\end{aligned}$$

Donc finalement, $\theta = \frac{\ell}{r} = \alpha$, c'est-à-dire que θ est la solution de $\cos\theta = \frac{p}{r}$.

5.4. arcsin et arccos

Définition 5.4.1. $\arccos x = \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ = angle entre l'axe des x et le point $(x, \sqrt{1-x^2})$

$\arcsin x = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ = angle entre l'axe des y et le point $(x, \sqrt{1-x^2})$

pour $x \in [-1, 1]$.

****

Propriétés.

0. $\arcsin 0 = 0$

$\arccos 1 = 0$

1. arccos et arcsin sont bien définies.

2. $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

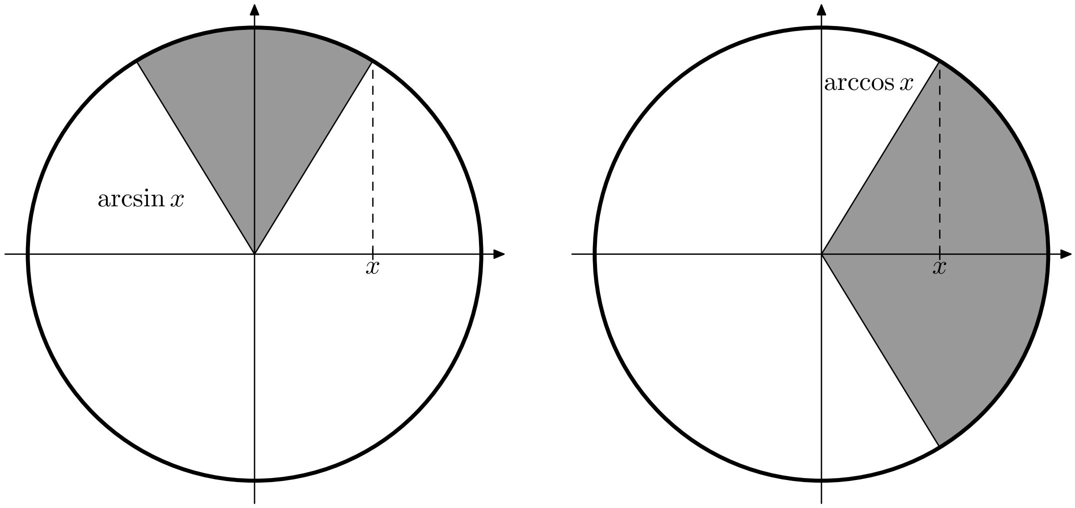
3. arccos et arcsin sont dérivables sur $(-1, 1)$ et

$$\arccos' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad \arcsin' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. $\arccos x = x\sqrt{1-x^2} + 2\displaystyle\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$

$\arcsin x = 2\displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t - x\sqrt{1-x^2}$

et elles correspondent aux aires suivantes :



5. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$\cos(\arccos x) = x \qquad \text{et} \qquad \sin(\arcsin x) = x$$

et

$$\begin{aligned} \arccos(\cos y) &= y \qquad \text{pour } y \in [0, \pi] \\ \arcsin(\sin y) &= y \qquad \text{pour } y \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

5.5. tan et arctan

Définition 5.5.1. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (définie pour $x \neq 0\big(n+\frac{1}{2}\big)\pi, n \in \mathbb{Z}$)

****

Propriétés.

0. $\tan(0) = 0$

1. tan est une fonction impaire

2. $$\tan'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

On note que $\tan'(x) > 0$ pour tout $x \neq \big(n+\frac{1}{2}\big)\pi$.

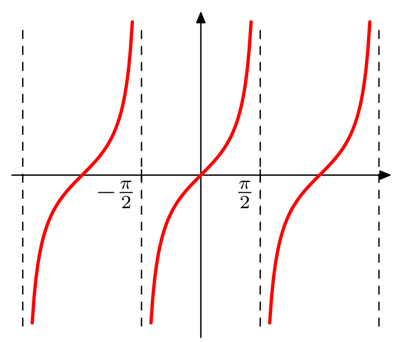
3. $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

[On a

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

On divise partout par $\cos a \cos b$

$$= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.\ \Big]$$



4. $\tan(x+\pi) = \tan x$ pour tout $x \neq \big(n+\frac{1}{2}\big)$, $n \in \mathbb{Z}$

5.

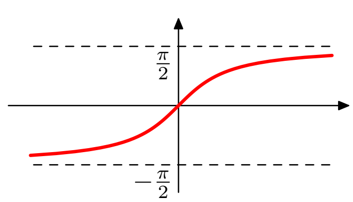
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

Définition 5.5.2. $\tan \big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big) \to \mathbb{R}$ est une bijection. Son inverse est arctan: $\mathbb{R}\big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big)$.

****



6. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$\big[$Sur $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tan est strictement croissante, surjective et dérivable, donc arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ (théorème d'analyse 1).

On dérive l'équation $\tan(\arctan x) = x$:

$$\begin{aligned}\arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{\sec^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1+x^2}.\ \Big]\end{aligned}$$

7. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$ pour tout $|x| < 1$.

En prenant $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on déduit que

$$\arctan\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 - \cdots = \frac{\pi}{6},$$

donc

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \cdots\right).$$

Avec quelques approximations, on trouve $\pi \approx 3{,}1415926\ldots$

Le travail complet pour obtenir l'approximation est intéressant. D'abord, on aura besoin d'une approximation de $\sqrt{3}$. On part avec le fait que

$$\frac{64}{25} \le 3 \le \frac{81}{25} \iff \frac{8}{5} \le \sqrt{3} \le \frac{9}{5}$$

et donc $\left|\sqrt{3} - \frac{17}{10}\right| \le \frac{1}{10}$. Ensuite, on utilise la méthode de Newton. On pose $f(x) = x^2 - 3$, $F(x) = x - \frac{x^2-3}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2x}$ et $x_0 = \frac{17}{10}$. D'abord, on remarque pour $x \in I := \left[\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right]$, on a

$$|f'(x)| = |2x| \ge 1 \qquad \text{et} \qquad |f''(x)| = 2.$$

On pose $K = \frac{\max_I |f''(x)|}{2\min_I |f'(X)|} \leq 1$. Les itérées de la méthode de Newton sont

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0) = \frac{589}{340} \\ x_2 &= F(x_1) = \frac{693\ 721}{400\ 520} \end{aligned}$$

Selon la méthode de Newton, on a $|x_{n+1} - \sqrt{3}| \leq K|x_n - \sqrt{3}|^2$, où $K \leq 1$. Ainsi, on peut remplacer K par 1. Selon le choix initial de x_0, on a

$$\begin{aligned} \left|x_1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right| &\leq \left|x_0 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 \leq \tfrac{1}{100} \\ \left|x_2 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right| &\leq \left|x_1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 \leq \tfrac{1}{10\ 000} \end{aligned}$$

À la deuxième itération, on a déjà une approximation très bonne de $\sqrt{3}$. On écrit $\sqrt{3} = x_2 + r_1$, où $|r_1| \leq \frac{1}{10\ 000}$.

Ensuite, la série $s = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \cdots\right)$ est alternée. On pose $a_n = \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{3^n}$. C'est une suite décroissante, donc le théorème de Leibniz nous donne

$$|\pi - s_n| \leq a_{n+1},$$

où (s_n) est la suite des sommes partielles de s. Avec $n = 5$, on trouve

$$a_6 = \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{13} \frac{1}{3^6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2}{3159} \leq \frac{2}{3159}$$

et

$$\begin{aligned} s_5 &= \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^4 \cdot 9} - \frac{1}{3^5 \cdot 11}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\frac{254\ 512}{280\ 665} \\ &= x_2\frac{509\ 024}{280\ 665} + r_2, \end{aligned}$$

où $r_2 = r_1 \frac{509\ 024}{280\ 665}$ et vérifie $|r_2| \leq \frac{1}{5\ 000}$. Enfin, on a

$$\left|\pi - x_2\frac{509\ 024}{280\ 665}\right| \leq \frac{2}{3159} + |r_2| \leq \frac{1}{1500} + \frac{1}{5000} = \frac{13}{15\ 000} \leq \frac{1}{1000}$$

d'où $\pi = 3{,}141\ldots + r_3$, où $|r_3| \leq \frac{1}{1000}$.

Pour obtenir une meilleure précision avec cette méthode, il faudrait itérer davantage le méthode de Newton et garder plus de terme de la série s.

Remarque. Formule de Machin (1708)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\tfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\tfrac{1}{239}\right).$$

****

5.6. cosh et sinh

Définition 5.6.1. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

****

Propriétés.

0. $\cosh(0) = 1$
$\sinh(0) = 0$

1. cosh est une fonction paire
sinh est une fonction impaire

2. $\cosh'(x) = \sinh x$
$\sinh'(x) = \cosh x$

3. $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$
$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$

4. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ pour tout x.

Ainsi, $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ est une paramétrisation de l'hyperbole, d'où le nom *fonctions hyperboliques*.

5. $\cosh x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
$\sinh x > 0$ pour tout $x > 0$
Donc $\cosh'(x), \sinh'(x) > 0$ pour $x > 0$ et $\cosh''(x), \sinh''(x) > 0$ pour $x > 0$. Il s'ensuit que cosh et sinh sont strictement croissantes et convexes pour $x > 0$.

Remarque. On peut imaginer que

$$\cosh x = \cos(ix)$$
$$\sinh x = \frac{\sin(ix)}{i},$$

où $i^2 = -1$. (Voir analyse complexe.)

****

Chapitre 6

Série de Fourier