Analyse 2

Devoir 2

Fonctions transcendantes et séries de Fourier (solutionnaire)

Si vous utilisez un résultat, indiquez d'où il provient (p.ex. « par un théorème du chapitre 5 » ou « par l'exercice 12 de la série 5 » ou « par le théorème des deux gendarmes »).

Le devoir est à remettre **jeudi le 8 décembre** au début du cours en papier. Je n'accepte pas les devoirs remis par courriel, sauf en cas de situation exceptionnelle.

Propreté.

1. Il est fortement suggéré d'écrire vos devoirs en TEX ou en Word. Dans ce cas, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Cependant, il est permis de remettre un devoir écrit à la main (sur papier ou sur une tablette) **si les consignes suivantes sont respectées** :
   - écrire à double-interligne;
   - écrire recto seulement;
   - écrire sur du papier blanc ou ligné (mais pas quadrillé!);
   - écrire *très* propre, *lisiblement* et *gros*.

   Si l'un de ces critères n'est pas rempli, je n'accepterai pas le devoir. Vous pourrez alors le réécrire en suivant correctement les consignes et le remettre en retard (10% par jour, jusqu'à un maximum de deux jours, après quoi, vous aurez une note de 0).

Question 1. (10pts) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(1) > 0$ et on pose $a = f(1)$.

a) En supposant que f est dérivable et en utilisant la dérivée, montrer que $f(x) = a^x$.

b) En supposant que f est seulement continue, montrer que $f(x) = a^x$.
Indice. Commencez par montrer que l'énoncé est vraie pour les x rationnels.

Solution. a) On commence par montrer que $f(0) = 1$. D'abord, on a $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$, alors $f(1) = f(1+0) = f(1)f(0) = 0$, ce qui est une contradiction.

Ensuite, on dérive l'équation $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à y

$$f'(x+y) = f(x)f'(y)$$

et on évalue en $y = 0$

$$f'(x) = f'(0)f(x).$$

Si $f'(0) = 0$, alors f est constante et dans ce cas, on doit avoir $f(x) = 1$, car $f(0) = 1$.

On suppose maintenant que $f'(0) \neq 0$. On pose $b = f'(0)$ et $h(x) = f(x)e^{-bx}$. On obtient

$$h'(x) = f'(x)e^{-bx} - bf(x)e^{-bx}$$

$$= bf(x)e^{-bx} - bf(x)e^{-bx}$$
$$= 0.$$

Ainsi, h est constante et $h(0) = h(1)$, c'est-à-dire $1 = f(x)e^{-bx}$ ou simplement $f(x) = e^{bx}$.

Enfin, on a $a = f(1) = e^b$, donc $b = \log a$. Il suit que $f(x) = e^{bx} = e^{x \log a} = a^x$.

b) Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'une part, on a

$$f(n) = f(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{f(1) \cdots f(1)}_{n \text{ fois}} = a^n.$$

Si $n \neq 0$, alors on a

$$a = f(1) = f\big(\underbrace{\tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{1}{n}}_{n \text{ fois}}\big) = f\big(\tfrac{1}{n}\big)^n$$

et donc $f\big(\frac{1}{n}\big) = a^{\frac{1}{n}}$.

Ensuite, si $x = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, alors on a

$$f(x) = f\big(\tfrac{p}{q}\big) = f\big(\underbrace{\tfrac{1}{q} + \cdots + \tfrac{1}{q}}_{p \text{ fois}}\big) = f\big(\tfrac{1}{q}\big)^p = \big(a^{\frac{1}{q}}\big)^p = a^{\frac{p}{q}}.$$

Ainsi, on a $f(x) = a^x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe une suite (x_n) telle que $x_n \in \mathbb{Q}$ et $x_n \to y$ lorsque $n \to \infty$. Puisque x_n est rationnel, on a $f(x_n) = a^{x_n}$ pour tout n, donc on laisse $n \to \infty$ et comme f et $a^{\cdot}$ sont continues, il suit que $f(y) = a^y$.

Question 2. (5pts) Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $a = f(1)$. Montrer que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Indice. Utilisez la question 1.

Solution. On pose $h(x) = \exp\big(f(x)\big)$. On voit que $h(x + y) = \exp\big(f(x) + f(y)\big) = \exp\big(f(x)\big)\exp\big(f(y)\big) = h(x)h(y)$. De plus, il est clair que $b := h(1) = \exp(a) > 0$, donc le numéro précédent s'applique à h. Ainsi, on a $h(x) = e^{x \log b}$. Il suit que $g(x) = x \log b = ax$, puisque $b = e^a$.

Question 3. (10pts) Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, régulière par morceaux et 2π-périodique. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} f(x + \alpha j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{d}t \qquad \text{pour tout } x.$$

Indice. Deux options : 1. montrer d'abord l'énoncé pour e^{ikx} pour $k \in \mathbb{Z}$ en utilisant les sommes géométriques ou 2. montrer d'abord l'énoncé pour $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ pour $k \in \mathbb{N}$ en faisant appel à l'exercice 12 de la série 5 (on le tient pour acquis).

Solution. Remarquons d'abord que le cas où f est constante se fait directement sans problème.

On suppose que $f(x) = \cos(kx)$, où $k \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\mathrm{d}x = 0$, donc on doit montrer que $\frac{1}{n}\sum \cos(kx + \alpha kj) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} \cos(kx+\alpha kj) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\Big(\cos(kx)\cos(\alpha kj) - \sin(kx)\sin(\alpha kj)\Big) \qquad \text{(Identité trigo)} \\
&= \cos(kx)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\cos(\alpha kj) - \sin(kx)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\sin(\alpha kj) \\
&= \frac{\cos(kx)}{n}\left(\frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\alpha k\big)}{\sin\big(\frac{\alpha k}{2}\big)} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sin(kx)}{n}\frac{\sin\big(\frac{n+1}{2}\alpha k\big)\sin\big(\frac{n}{2}\alpha k\big)}{\sin\big(\frac{\alpha k}{2}\big)} \\
&\qquad\qquad \text{(Série 5, exercice 12)} \\
&\longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

La démarche est similaire pour $f(x) = \sin(kx)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et soit s_N un polynôme trigonométrique :

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big),$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$, $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}$ sont des coefficients (quelconques). D'une part, on voit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_N = \frac{a_0}{2}.$$

D'autre part, on voit également que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} s_N(x+\alpha j) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\Bigg(&\frac{a_k}{n}\sum_{j=0}^{n}\cos(kx+\alpha kj) \\
&+ \frac{b_k}{n}\sum_{j=0}^{n}\sin(kx+\alpha kj)\Bigg) \\
\longrightarrow \frac{a_0}{2} \qquad &\text{lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Enfin, puisque f est continue, régulière par morceaux et que $f(-\pi) = f(\pi)$, sa série de Fourier converge uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$. Soit (S_m) la suite de ses sommes partielles, c'est-à-dire

$$S_m(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k(f)\cos(kx) + \sum_{k=1}^{m} b_k(f)\sin(kx).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ et pour tout $m \geq N$, on a $|f(x) - S_m(x)| < \varepsilon$. De plus, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} S_j(x + \alpha j) - \frac{a_0(f)}{2} \right| < \varepsilon.$$

En combinant, pour $m \geq N$ et $n \geq M$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} f(x + \alpha j) - \frac{a_0(f)}{2} \right| &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} f(x + \alpha j) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} S_m(x + \alpha j) \right| \\
&\qquad + \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} S_j(x + \alpha j) - \frac{a_0(f)}{2} \right| \\
&< \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \Big(f(x + \alpha j) - S_m(x + \alpha j) \Big) \right| + \varepsilon \\
&< \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \varepsilon \right| + \varepsilon \\
&= 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi, il suit que $\frac{1}{n} \sum f(x + \alpha j) \to \frac{a_0(f)}{2}$ lorsque $n \to \infty$. Par définition de $a_0(f)$, on a

$$\frac{a_0(f)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f,$$

comme voulu.

Question 4. (10pts) [1]Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et régulière par morceaux. Le but est de montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$. *Indication*. Le a) et le b) sont indépendants, c'est-à-dire qu'on n'utilise pas le a) pour faire le b). Le c) combine le a) et le b).

a) Montrer qu'il existe une suite (a_k) telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\sup_{[0,1]} |s_n - f| < \varepsilon,$$

où $s_n = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$.

Indice. Définissez une fonction $g\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ paire, continue, régulière par morceaux et périodique telle que $g\big|_{[0,1]} = f$.

[1] Le théorème est vrai pour f continue, mais on suppose que f est régulière par morceaux pour cet exercice.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour chaque k, il existe $m(k) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!} - \cos(kx) \right| < \frac{\varepsilon}{2^k |a_k|}$$

c) On pose

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!}.$$

Montrer que si $n \geq N$, alors

$$\sup_{x\in[0,1]} |P_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Solution. a) On pose

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in [0,1], \\ f(-x), & \text{si } x \in [-1,0), \\ f(1), & \text{si } x[-\pi,\pi] \setminus [-1,1]. \end{cases}$$

D'abord, g est continue, puisque f l'est sur $[0,1]$, que g est constante sur $[-\pi,\pi] \setminus [-1,1]$ et qu'il n'y a pas de discontinuité en 1, -1 ou 0. De plus, g est périodique. Enfin, g est régulière par morceaux, puisque f l'est. Ainsi, la série de Fourier de g converge uniformément vers g sur $[-\pi,\pi]$.

Soit (s_n), la suite des sommes partielles de g. Puisque g est paire, on sait que $b_n(g) = 0$ pour tout n, donc s_n est une somme de cosinus. De plus, on a

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sup_{[0,1]} |s_n - g| = \lim_{n\to\infty} \sup_{[0,1]} |s_n - f|,$$

ce qui montre le a).

b) On a

$$\cos(kx) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!}$$

et la convergence de cette série est uniforme sur $[0,1]$. Ainsi, il existe $m(k) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{[0,1]} \left| \sum_{j=m(k)}^{\infty} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!} \right| < \frac{\varepsilon}{2^k |a_k|},$$

qui est ce que l'on voulait montrer.

c) D'abord, on voit que

$$\begin{aligned}
|P_n - s_n| &= \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!} - \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \left| \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!} - \cos(kx) \right| \\
&< \sum_{k=1}^{n} |a_k| \frac{\varepsilon}{2^k |a_k|} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|P_n(x) - f(x)| \leq |P_n(x) - s_n(x)| + |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon$$

pour tout $x \in [0, 1]$, comme voule.