Analyse 2

Devoir 2

Fonctions transcendantes et séries de Fourier

Si vous utilisez un résultat, indiquez d'où il provient (p.ex. « par un théorème du chapitre 5 » ou « par l'exercice 12 de la série 5 » ou « par le théorème des deux gendarmes »).

Le devoir est à remettre **jeudi le 8 décembre** au début du cours en papier. Je n'accepte pas les devoirs remis par courriel, sauf en cas de situation exceptionnelle.

Propreté.

1. Il est fortement suggéré d'écrire vos devoirs en TEX ou en Word. Dans ce cas, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Cependant, il est permis de remettre un devoir écrit à la main (sur papier ou sur une tablette) **si les consignes suivantes sont respectées** :
   - écrire à double-interligne;
   - écrire recto seulement;
   - écrire sur du papier blanc ou ligné (mais pas quadrillé!);
   - écrire *très* propre, *lisiblement* et *gros*.

   Si l'un de ces critères n'est pas rempli, je n'accepterai pas le devoir. Vous pourrez alors le réécrire en suivant correctement les consignes et le remettre en retard (10% par jour, jusqu'à un maximum de deux jours, après quoi, vous aurez une note de 0).

Question 1. (10pts) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(1) > 0$ et on pose $a = f(1)$.

a) En supposant que f est dérivable et en utilisant la dérivée, montrer que $f(x) = a^x$.

b) En supposant que f est seulement continue, montrer que $f(x) = a^x$.
Indice. Commencez par montrer que l'énoncé est vraie pour les x rationnels.

Question 2. (5pts) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $a = f(1)$. Montrer que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Indice. Utilisez la question 1.

Question 3. (10pts) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, régulière par morceaux et 2π-périodique. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} f(x + \alpha j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{pour tout } x.$$

Indice. Deux options : 1. montrer d'abord l'énoncé pour e^{ikx} pour $k \in \mathbb{Z}$ en utilisant les sommes géométriques ou 2. montrer d'abord l'énoncé pour $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ pour $k \in \mathbb{N}$ en faisant appel à l'exercice 12 de la série 5 (on le tient pour acquis).

Question 4. (10pts) [1]Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et régulière par morceaux. Le but est de montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$. *Indication.* Le a) et le b) sont indépendants, c'est-à-dire qu'on n'utilise pas le a) pour faire le b). Le c) combine le a) et le b).

a) Montrer qu'il existe une suite (a_k) telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a
$$\sup_{[0,1]} |s_n - f| < \varepsilon,$$
où $s_n = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$.
Indice. Définissez une fonction $g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ paire, continue, régulière par morceaux et périodique telle que $g\big|_{[0,1]} = f$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour chaque k, il existe $m(k) \in \mathbb{N}$ tel que
$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!} - \cos(kx) \right| < \frac{\varepsilon}{2^k |a_k|}$$

c) On pose
$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(-1)^j (kx)^{2j}}{(2j)!}.$$
Montrer que si $n \geq N$, alors
$$\sup_{x\in[0,1]} |P_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

[1] Le théorème est vrai pour f continue, mais on suppose que f est régulière par morceaux pour cet exercice.