Analyse 2

Devoir 1

Intégration et convergence uniforme (solutionnaire)

Si vous utilisez un résultat, indiquez d'où il provient (p.ex. « par un théorème du chapitre 1 » ou « par l'exercice 12 de la série 2 » ou « par le théorème des deux gendarmes »).

Le devoir est à remettre **jeudi le 13 octobre** au début du cours en papier. Je n'accepte pas les devoirs remis par courriel, sauf en cas de situation exceptionnelle.

Propreté.

1. Il est fortement suggéré d'écrire vos devoirs en TEX ou en Word. Dans ce cas, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Cependant, il est permis de remettre un devoir écrit à la main (sur papier ou sur une tablette) **si les consignes suivantes sont respectées** :
   - écrire à double-interligne;
   - écrire recto seulement;
   - écrire sur du papier blanc ou ligné (mais pas quadrillé!);
   - écrire *très* propre, *lisiblement* et *gros*.

   Si l'un de ces critères n'est pas rempli, je n'accepterai pas le devoir. Vous pourrez alors le réécrire en suivant correctement les consignes et le remettre en retard (10% par jour, jusqu'à un maximum de deux jours, après quoi, vous aurez une note de 0).

Question 1. (5pts) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On suppose qu'il existe $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,b]$ telle que $F'(x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Attention ! On ne peut pas simplement appliquer le théorème fondamental du calcul tel que vu en classe. Voyez-vous pourquoi ?

Indice. Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ une partition de $[a,b]$. Alors commencez par écrire $F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} \big(F(x_j) - F(x_{j-1})\big)$. Il y a probablement un théorème du chapitre 1 qui peut vous aider à partir de là.

Solution. Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ une partition de $[a,b]$. Pour chaque $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, remarquons que F est continue sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_j]$ et F' est existe sur (x_{j-1}, x_j). Ainsi, on peut applique le théorème des accroissements finis : il existe $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tel que $F(x_j) - F(x_{j-1}) = f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$.

On a donc

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} \big(F(x_j) - F(x_{j-1})\big) \qquad \text{(somme téléscopique)}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}). \qquad (*)$$

Ensuite, pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j$, où $m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f$ et $M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f$. On a donc

$$I(f, P) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) = S(f, P).$$

Par $(*)$, on déduit que

$$I(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, P).$$

Puisque cela est vraie pour toute partition P de $[a, b]$, il suit que

$$\underline{\int_a^b} f \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int_a^b} f. \qquad (**)$$

Puisque f est intégrable, on a $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$. En remplaçant cela dans $(**)$, on trouve

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f.$$

Question 2. (10pts) Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, \mathrm{d}x$ et $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

a) Montrer que $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n \mathrm{d}t$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée.

c) Montrer que pour $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq 1 - t \leq e^{-t}$. Déduire que $I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} J_n$ et calculer la limite de (I_n).

d) Montrer que $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

e) À partir du c) et du d), montrer que $\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Solution. a) Il s'agit d'utilise l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et de faire la substitution $t = \sin x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos^2 x\big)^n \cos x \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - \sin^2 x\big)^n \cos x \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \big(1 - t^2\big)^n \mathrm{d}t.$$

b) Puisque $t \in [0,1]$, il suit que $0 \leq 1-t^2 \leq 1$ et donc $(1-t^2)^n \leq (1-t^2)^{n+1}$. On a vu que cela implique que $\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \mathrm{d}t$, c'est-à-dire que $I_n \leq I_{n+1}$.

Ensuite, puisque $0 \leq (1-t^2)^n$, il suit que $0 \leq I_n$.

c) On pose $f(t) = e^{-t} + t - 1$, où $t \in [0,1]$. On a $f'(t) = -e^{-t} + 1$, donc $f'(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$. Ainis, les extrémums de f sont atteint à la frontière. On voit que $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1}$. Autrement dit, $t = 0$ est le minimum de f sur $[0,1]$. Il suit que $f(t) \geq f(0)$, c'est-à-dire que $e^{-t} + t - 1 \geq 0$, comme voulu.

Ensuite, puisque $t \in [0,1]$, il suit que $t^2 \in [0,1]$, donc l'inégalité précédente donne $0 \leq 1 - t^2 \leq e^{-t^2}$, et même que pour tout $n \in \mathbb{N}$,on obtient $0 \leq (1-t^2)^n \leq e^{-nt^2}$. Avec la substitution $x = \sqrt{n}t$, on obtient

$$I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}} J_n.$$

Enfin, puisque $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ sur $[1,\infty)$, par le test de comparaison, l'intégrale impropre $\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x$ converge. On en déduit que la suite (J_n) est convergent, donc elle est bornée. On a ainsi

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} J_n \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty,$$

d'où $I_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Question 3. (10pts) a) Trouver une fonction $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continue et une suite $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ de fonctions continues telles que $\int_0^\infty f_n$ et $\int_0^\infty f$ convergent, $f_n \to f$ uniformément sur $[0,\infty)$, mais $\int_0^\infty f_n \not\to \int_0^\infty f$ lorsque $n \to \infty$.

b) Soit maintenant $f_n, f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ telles que

1. f_n et f sont intégrables sur $[a,m]$ pour tout $m,n \in \mathbb{N}$;
2. $f_n \to f$ uniformément sur $[a,\infty)$;
3. il existe $g\colon [a,\infty) \to [0,\infty)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,\infty)$ et $\int_a^\infty g$ converge.

i) Montrer que $\int_a^\infty f_n$ et $\int_a^\infty f$ convergent.

ii) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $M \geq a$ tel que $\int_M^\infty g < \varepsilon$.

iii) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $\int_a^M |f - f_n| < \varepsilon$.

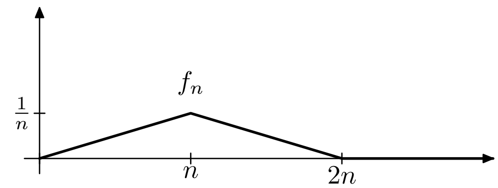
iv) Montrer que $\int_M^\infty |f_n - f| < 2\varepsilon$.

v) Déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n = \int_a^\infty f.$$

Solution. a) On pose

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}x, & \text{si } 0 \leq x \leq n, \\ -\frac{1}{n^2}x + \frac{2}{n}, & \text{si } n < x \leq 2n, \\ 0, & \text{si } x > 2n. \end{cases}$$



Alors f_n est continue sur $[0, \infty)$ et $\int_0^\infty f_n$ correspond à l'aire d'un triangle de base $2n$ et de hauteur $\frac{1}{n}$, donc $\int_0^\infty f_n = 1$.

Ensuite, il est clair que $f_n \to 0$ simplement, donc on pose $f(x) = 0$. On voit que $|f_n - f| \leq \frac{1}{n}$ pour tout x, donc $f_n \to f$ uniformément sur $[0, \infty)$. Enfin, comme $\int_0^\infty f = 0$, on a bien que $1 = \int_0^\infty f_n \not\to \int_0^\infty f = 0$ lorsque $n \to \infty$.

b) *i*) Il est clair que $\int_a^\infty f_n$ converge, par le test de comparaison et le fait que la converge absolue implique la convergence. En prenant la limite lorsque $n \to \infty$ dans l'inégalité $|f_n(x)| \leq g(x)$, on obtient $|f(x)| \leq g(x)$, donc $\int_a^\infty f$ converge pour la même raison.

ii) Puisque $\int_a^\infty g$ converge, il suit que $\lim_{M\to\infty} \int_M^\infty g = \lim_{M\to\infty} \left(\int_a^\infty g - \int_a^M g\right) = 0$. Par le définition de la limite, on obtient qu'il existe $M > a$ tel que $\left|\int_M^\infty g\right| < \varepsilon$. Puisque $g(x) \geq 0$, on peut enlever les valeurs absolues.

iii) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M-a}$ pour tout $x \in [a, \infty)$. En intégrant de a à M de chaque côté, on obtient l'inégalité.

iv) On a

$$\int_a^M |f - f_n| < \int_a^M (g + g) < 2\varepsilon,$$

par le *ii*).

v) Pour $n \geq N$, on a donc

$$\begin{aligned} \left|\int_a^\infty (f_n - f)\right| &= \int_a^\infty |f_n - f| \\ &= \int_a^M |f_n - f| + \int_M^\infty |f_n - f| \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon \\ &= 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, on en déduit que $\int_a^\infty f_n \to \int_a^\infty f$ lorsque $n \to \infty$.