Analyse 2

Devoir 1

Intégration et convergence uniforme

Si vous utilisez un résultat, indiquez d'où il provient (p.ex. « par un théorème du chapitre 1 » ou « par l'exercice 12 de la série 2 » ou « par le théorème des deux gendarmes »).

Le devoir est à remettre **jeudi le 13 octobre** au début du cours en papier. Je n'accepte pas les devoirs remis par courriel, sauf en cas de situation exceptionnelle.

Propreté.

1. Il est fortement suggéré d'écrire vos devoirs en TEX ou en Word. Dans ce cas, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Cependant, il est permis de remettre un devoir écrit à la main (sur papier ou sur une tablette) **si les consignes suivantes sont respectées** :
   - écrire à double-interligne;
   - écrire recto seulement;
   - écrire sur du papier blanc ou ligné (mais pas quadrillé!);
   - écrire *très* propre, *lisiblement* et *gros*.

   Si l'un de ces critères n'est pas rempli, je n'accepterai pas le devoir. Vous pourrez alors le réécrire en suivant correctement les consignes et le remettre en retard (10% par jour, jusqu'à un maximum de deux jours, après quoi, vous aurez une note de 0).

Question 1. (5pts) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On suppose qu'il existe $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,b]$ telle que $F'(x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Attention ! On ne peut pas simplement appliquer le théorème fondamental du calcul tel que vu en classe. Voyez-vous pourquoi ?

Indice. Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ une partition de $[a,b]$. Alors commencez par écrire $F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} \big(F(x_j) - F(x_{j-1})\big)$. Il y a probablement un théorème du chapitre 1 qui peut vous aider à partir de là.

Question 2. (10pts) Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, \mathrm{d}x$ et $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

a) Montrer que $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée.

c) Montrer que pour $t \in [0,1]$, on a $0 \leq 1 - t \leq e^{-t}$. Déduire que $I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} J_n$ et calculer la limite de (I_n).

d) Montrer que $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

e) À partir du c) et du d), montrer que $\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Question 3. (10pts) a) Trouver une fonction $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continue et une suite $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ de fonctions continues telles que $\int_0^\infty f_n$ et $\int_0^\infty f$ convergent, $f_n \to f$ uniformément sur $[0,\infty)$, mais $\int_0^\infty f_n \not\to \int_0^\infty f$ lorsque $n \to \infty$.

b) Soit maintenant $f_n, f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ telles que

1. f_n et f sont intégrables sur $[a,m]$ pour tout $m,n \in \mathbb{N}$;
2. $f_n \to f$ uniformément sur $[a,\infty)$;
3. il existe $g\colon [a,\infty) \to [0,\infty)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,\infty)$ et $\int_a^\infty g$ converge.

i) Montrer que $\int_a^\infty f_n$ et $\int_a^\infty f$ convergent.

ii) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $M \geq a$ tel que $\int_M^\infty g < \varepsilon$.

iii) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $\int_a^M |f - f_n| < \varepsilon$.

iv) Montrer que $\int_M^\infty |f_n - f| < 2\varepsilon$.

v) Déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n = \int_a^\infty f.$$

Remarque. L'hypothèse 1. du b) pourrait être remplacé par « f_n est continue pour tout n », mais la continuité n'est pas utilisée dans la démonstration.