#1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π-périodique.
MQ $\forall a \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{a-\pi}^{a+\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f$.

On a

$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t)\,dt = \int_{a-\pi}^{-\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \int_{\pi}^{a+\pi} f(t)\,dt$$

$$= \int_{a-\pi}^{-\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - \int_{a+\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

$u = t - 2\pi$
$du = dt$

$$= \int_{a-\pi}^{-\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - \int_{a-\pi}^{-\pi} f(u+2\pi)\,du$$

$$= \cancel{\int_{a-\pi}^{-\pi} f(t)\,dt} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - \cancel{\int_{a-\pi}^{-\pi} f(u)\,du}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

#2 Calculer la série de Fourier des fonctions $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^3$

On a $\displaystyle a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\,dx = 0$ car f est impaire.

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos(nx)\,dx = 0 \quad \text{car } x^3\cos(nx) \text{ est impaire.}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin(nx)\,dx$$

$u = x^3$ $\quad dv = \sin(nx)dx$
$du = 3x^2dx$ $\quad v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-x^3\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{3x^2\cos(nx)}{n}\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{-\pi^3(-1)^n}{n} + \frac{(-\pi)^3(-1)^n}{n} \right) + \frac{3}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx \right)$$

$u = x^2$ $\quad dv = \cos(nx)dx$
$du = 2xdx$ $\quad v = \frac{\sin(nx)}{n}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi^3(-1)^n}{n} + \frac{3}{n}\left(\cancel{\left[\frac{x^2\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi}} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x\sin(nx)}{n}\,dx \right)\right)$$

$u = x$ $\quad dv = \sin(nx)dx$
$du = dx$ $\quad v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$$= \frac{-2\pi^2(-1)^n}{n} - \frac{6}{\pi n^2}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{-2\pi^2(-1)^n}{n} - \frac{6}{\pi n^2}\left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} - \frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\left[\cancel{\frac{\sin(nx)}{n}}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{-2\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{12(-1)^n}{n^3} = \frac{2(-1)^n(6-n^2\pi^2)}{n^3}$$

Alors la série de Fourier cherchée est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(6-n^2\pi^2)}{n^3}\sin(nx)$$

(b) $f(x) = e^{2x}$

On a $a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})$. Pour $n \geq 1$, on a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\cos(nx)\,dx$$

$u = \cos(nx)$ $\quad dv = e^{2x}dx$
$du = -n\sin(nx)dx$ $\quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{e^{2x}\cos(nx)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\sin(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{2\pi}(-1)^n - e^{-2\pi}(-1)^n}{2} + \frac{n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\sin(nx)\,dx\right)$$

$u = \sin(nx)$ $\quad dv = e^{2x}dx$
$du = n\cos(nx)$ $\quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{2} + \frac{n}{2}\left(\left[\cancel{\frac{e^{2x}\sin(nx)}{2}}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\cos(nx)\,dx\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{2\pi} - \frac{n^2}{4}a_n(f)$$

$$\Rightarrow a_n(f) = \frac{2(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(4+n^2)\pi}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\sin(nx)\,dx$$

$u = \sin(nx)$ $\quad dv = e^{2x}dx$
$du = n\cos(nx)dx$ $\quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\cancel{\frac{e^{2x}\sin(nx)}{2}}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\cos(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{-n}{2}a_n(f) = \frac{-n(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(4+n^2)\pi}$$

Alors la série de Fourier cherchée est

$$\frac{(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{4\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{\pi(4+n^2)}\cos(nx) + \frac{n(-1)^{n+1}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{\pi(4+n^2)}\sin(nx)\right)$$

#3 Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leqslant x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

Étudier la convergence uniforme de la série de Fourier de f.

Notons d'abord que f est lisse par morceaux. Alors sa série de Fourier converge vers la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Notons en particulier que cette fonction n'est pas continue. Or, comme sin et cos sont continues, si la série de Fourier converge unif., elle converge vers une fonction continue. Donc elle ne converge pas unif.

(On peut aussi montrer que la série de Fourier de f est donnée par $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2\pi n} \sin(2nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{2n}$.
On a montré à un TP précédent que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ ne converge pas unif. On peut montrer que manière analogue que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{2n}$ non plus.)

#4 (a) MQ pour $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ intégrable, on a $c_n(f+g) = c_n(f) + c_n(g)$ et $c_n(Cf) = C\, c_n(f)$, avec C une constante, où $c_n = a_n$ ou b_n.

On a

$$a_n(f+g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x)+g(x))\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx$$
$$= a_n(f) + a_n(g)$$

$$a_n(Cf) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Cf(x)\cos(nx)\,dx$$
$$= C\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$= C\,a_n(f)$$

et similairement pour b_n.

(b) MQ si f est constante, alors $c_n(f) = 0$ $\forall n \neq 0$.

Si $f(x) = C$ $\forall x \in [-\pi, \pi]$, alors

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C\cdot\cos(nx)\,dx = \frac{C}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx = 0$$
$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{C}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,dx = 0$$

(c) Calculer la série de Fourier de $x + \frac{\pi}{4}$

Par le (a), $a_n(x+\frac{\pi}{4}) = a_n(x) + a_n(\frac{\pi}{4})$ et $b_n(x+\frac{\pi}{4}) = b_n(x) + b_n(\frac{\pi}{4})$. Alors, par le (b),

$$a_0(x+\tfrac{\pi}{4}) = a_0(x) + a_0(\tfrac{\pi}{4}) \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} a_n(x+\frac{\pi}{4}) = a_n(x) \\ b_n(x+\frac{\pi}{4}) = b_n(x) \end{array}\right\} \forall n \geq 1$$

Alors la série de Fourier est $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$.

#5 Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable t.q. $f(-\pi) = f(\pi)$.

(a) MQ $a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}$ et $b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$

On a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$u = f(x)$ $dv = \cos(nx)dx$
$du = f'(x)dx$ $v = \frac{\sin(nx)}{n}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\cancel{\left[\frac{f(x)\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{n}\cdot b_n(f')$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$u = f(x)$ $dv = \sin(nx)dx$
$du = f'(x)dx$ $v = \frac{-\cos(nx)}{n}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{f(x)\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\cancel{-\frac{f(\pi)(-1)^n}{n} + \frac{f(-\pi)(-1)^n}{n}}\right) + \frac{1}{n}a_n(f')$$

(b) Déduire que si f' est continûment dérivable et si $f'(-\pi) = f'(\pi)$, alors $a_n(f) = -\frac{a_n(f'')}{n^2}$ et $b_n(f) = -\frac{b_n(f'')}{n^2}$.

On peut appliquer le (a) à f', d'où

$$a_n(f') = -\frac{b_n(f'')}{n} \quad \text{et} \quad b_n(f') = \frac{a_n(f'')}{n}.$$

Alors

$$a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n} = -\frac{a_n(f'')}{n^2} \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n} = -\frac{b_n(f'')}{n^2}$$

(c) Déduire à partir du (b) que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$ si f vérifie les hypothèses du (b).

On sait déjà que la série conv. ponctuellement vers f, il reste à MQ la conv. est uniforme.

On a

$$\begin{aligned}
\left| a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) \right| &\leq |a_n(f)\cos(nx)| + |b_n(f)\sin(nx)| \\
&\leq |a_n(f)| + |b_n(f)| \\
&= \left| -\frac{a_n(f'')}{n^2} \right| + \left| -\frac{b_n(f'')}{n^2} \right| \\
&\leq \frac{M_1}{n^2} + \frac{M_2}{n^2} = \frac{M_1 + M_2}{n^2}
\end{aligned}$$

les coefficients de Fourier sont bornés $\Rightarrow \exists M_1, M_2$ t.q. $|a_n(f'')| \leq M_1$ et $|b_n(f'')| \leq M_2$.

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1+M_2}{n^2}$ converge, on conclut que la série de Fourier conv. unif. vers f par le critère de Weierstrass.

#6 Soit $c \in (0, \pi)$ et $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq |x| \leq c \\ 0 & \text{si } c < |x| \leq \pi \end{cases}$$

(a) Calculer la série de Fourier de f.

On a $a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^{c} dx = \frac{2c}{\pi}$ et $\forall n \geq 1$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^{c} \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-c}^{c}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(nc)}{n} - \frac{\sin(-nc)}{n} \right) = \frac{2\sin(nc)}{n\pi}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^{c} \sin(nx)\,dx = 0.$$

Alors la série de Fourier cherchée est

$$\frac{c}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(nc)}{n\pi} \cos(nx)$$

(b) MQ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nc)}{n} = \frac{\pi - 2c}{2}$

La fonction f est régulière par morceaux. En particulier, on peut appliquer le thm de convergence. En $x = c$, on a $\frac{1}{2}(f(c^+) + f(c^-)) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$, d'où

$$\frac{1}{2} = \frac{c}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(nc)}{n\pi} \cos(nc) = \frac{c}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nc)}{n}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nc)}{n} = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{\pi} \right) = \frac{\pi - 2c}{2}$$

#7 Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction déf. par $f(x) = \frac{(\pi^2 x - x^3)}{3}$.

(a) Déterminer la série de Fourier de f.

Par les résultats du #4, on sait que

$$a_n(f) = \frac{\pi^2}{3} a_n(x) - \frac{1}{3} a_n(x^3) \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{\pi^2}{3} b_n(x) - \frac{1}{3} b_n(x^3)$$

On a $a_n(x) = a_n(x^3) = 0$ et $b_n(x) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$, $b_n(x^3) = \frac{2(-1)^n(6 - n^2\pi^2)}{n^3}$.

D'où

$$b_n(f) = \frac{2\pi^2(-1)^{n+1}}{3n} - \frac{2(-1)^n(6 - n^2\pi^2)}{3n^3} = \frac{2(-1)^n(-\cancel{n^2\pi^2} - 6 + \cancel{n^2\pi^2})}{3n^3}$$
$$= \frac{4(-1)^{n+1}}{n^3}$$

et la série de Fourier cherchée est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^3} \sin(nx)$.

(b) MQ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$ (utilisez l'identité de Parseval)

Parseval : $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right)$

On calcule le côté gauche :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi^2 x - x^3}{3} \right)^2 dx = \frac{1}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^4 x^2 - 2\pi^2 x^4 + x^6)\, dx$$
$$= \frac{1}{9\pi} \left[\frac{\pi^4 x^3}{3} - \frac{2\pi^2 x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{9\pi} \left(\frac{2\pi^7}{3} - \frac{4\pi^7}{5} + \frac{2\pi^7}{7} \right)$$
$$= \frac{1}{9\pi} \left(\frac{70\pi^7 - 84\pi^7 + 30\pi^7}{105} \right) = \frac{16\pi^6}{945}$$

Pour le côté droit, on a

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^{n+1}}{n^3} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^6}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{16} \cdot \frac{16\pi^6}{945} = \frac{\pi^6}{945}$$

#9 On suppose qu $\exists\, \delta : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ t.q. $\forall f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ intégrable et continue en 0, on a $\int_{-\pi}^{\pi} f\delta = f(0)$. (Une telle fonction n'existe pas, mais on suppose que oui, pour l'exercice.)

(a) Calculer les coefficients de Fourier de δ. MQ sa série de Fourier est $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} D_N$.

On a

$$a_0(\delta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\delta = \frac{1}{\pi}.$$

Ensuite,

$$a_n(\delta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x)\cos(nx)\,dx = \cos(0) = \frac{1}{\pi}$$

$$b_n(\delta) = \cdots = \sin(0) = 0.$$

Alors la série de Fourier de δ est

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)\right) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos(nx)\right) \\ &\overset{\text{\#12 b) de la série 5}}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}\right) \\ &\overset{\text{déf. de } D_N}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} D_N\end{aligned}$$

(b) Cette série de Fourier converge-t-elle ?

Si $x = 0$: $\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(0)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 1\right)$ ne converge pas.

Sinon, on a

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}$$ qui diverge.

(notons que $\cos(nx) \not\to 0$ $(n\to\infty)$ $\Rightarrow$ diverge par critère du terme général).

(c) MQ $\forall f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ continûment dérivable, on a $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f D_N = f(0)$.

On a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f D_N - f(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f - f(0)) D_N \quad \text{car } \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N = 1$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(0)) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x)-f(0)}{2\sin(\frac{x}{2})}\right)\left(\sin(Nx)\cos(\tfrac{x}{2}) + \cos(Nx)\sin(\tfrac{x}{2})\right) dx$$

$$(*) \quad = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{(f(x)-f(0))\cos(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})}\right)\sin(Nx)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(x)-f(0)}{2}\right)\cos(Nx)\, dx$$

Posons $h(x) = \begin{cases} \dfrac{(f(x)-f(0))\cos(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\} \\ f'(x) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Elle est continue sauf peut-être en 0.

En 0,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(f(x)-f(0))\cos(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} \overset{\text{R.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)\cos(\frac{x}{2}) + (f(x)-f(0))\frac{-1}{2}\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}$$

$$= f'(x)$$

Posons $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{2}$. Alors f, g sont continues et intégrables, donc $(*)$ devient $b_N(h) + a_N(g)$.

Alors

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f D_N - f(0) = \lim_{N\to\infty}\left(b_N(h) + a_N(g)\right) = 0$$

car les coeff. de Fourier $\to 0$.

#11 Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et régulière par morceaux t.q. $f(-\pi) = f(\pi)$.

(a) Soient s_n les sommes partielles de la série de Fourier de f. MQ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (s_n - f)^2 = 0$.

On sait que $s_n \to f$ unif. Alors $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N_1$ et $\forall x \in [-\pi,\pi]$, $(s_n - f)^2 < |s_n - f| < 1$. Aussi, $\exists N_2$ t.q. $\forall n \geq N_2$ et $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $|s_n - f| < \varepsilon$. Alors $\forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$,

$$|(s_n - f)^2 - 0| = (s_n - f)^2 < |s_n - f| < \varepsilon \quad \forall x \in [-\pi, \pi],$$

d'où $(s_n - f)^2 \to 0$ unif. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (s_n - f)^2 \overset{\text{conv. unif.}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} (s_n - f)^2 = 0.$$

(b) (Égalité de Parseval) MQ $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$

On a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0^2}{4} + a_0 \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)\left(a_\ell \cos(\ell x) + b_\ell \sin(\ell x)\right) \right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4}\, dx + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \big(a_k a_\ell \cos(kx)\cos(\ell x) + a_k b_\ell \cos(kx)\sin(\ell x) + a_\ell b_k \sin(kx)\cos(\ell x) + b_k b_\ell \sin(kx)\sin(\ell x)\big)\, dx$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} a_k^2 \cos^2(kx) + b_k^2 \sin^2(kx)\, dx$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$$

#12 Prolonger $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ en une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est 2π-périodique et dont la série de Fourier est une série en cosinus.

(a) $f(x) = \sin(x)$.

On veut prolonger f en une fonction paire, alors on pose

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [0,\pi] \\ -\sin(x) & \text{si } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

et $\tilde{f}(x + 2\pi k) = \tilde{f}(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Alors, la série de Fourier de $\tilde{f}$ est donnée par

$$a_0(\tilde{f}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\sin(x)\,dx + \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left([\cos(x)]_{-\pi}^{0} + [-\cos(x)]_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\cos(0) - \cos(-\pi) - \cos(\pi) + \cos(0) \right) = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n(\tilde{f}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\sin(x)\cos(nx)\,dx + \int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)\,dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sin(x - nx) + \sin(x + nx) \right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\sin((1-n)x) + \sin((1+n)x) \right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos((1-n)x)}{1-n} \right]_0^{\pi} + \left[-\frac{\cos((1+n)x)}{1+n} \right]_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(1+n)(-\cos((1-n)\pi) + \cos(0)) + (1-n)(-\cos((1+n)\pi) + \cos(0))}{1-n^2} \right)$$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi) + 1}{1-n^2} \right) = \frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)}$$

Les $b_n(\tilde{f})$ sont nuls car $\tilde{f}$ est paire par construction. Alors on obtient la série $\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)} \cos(nx)$.

(b) $f(x) = x^3$.

On pose $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in [0,\pi] \\ -x^3 & \text{si } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$ et $\tilde{f}(x+2k\pi) = \tilde{f}(x)$.

Alors

$$a_0(\tilde{f}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f} = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x^3\,dx + \int_0^{\pi} x^3\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\int_0^{\pi} x^3\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{2}$$

$$a_n(\tilde{f}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(2\int_0^{\pi} x^3 \cos(nx)\,dx\right)$$

$u = x^3$, $du = 3x^2\,dx$; $dv = \cos(nx)\,dx$, $v = \frac{\sin(nx)}{n}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\left(\left[\frac{x^3 \sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2 \sin(nx)\,dx\right)\right)$$

$u = x^2$, $du = 2x\,dx$; $dv = \sin(nx)\,dx$, $v = \frac{-\cos(nx)}{n}$

$$= \frac{-6}{n\pi}\left(\left[-\frac{x^2\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx\right)$$

$u = x$, $du = dx$; $dv = \cos(nx)\,dx$, $v = \frac{\sin(nx)}{n}$

$$= \frac{-6}{n\pi}\left(\frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\left(\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx\right)\right)$$

$$= \frac{-6}{n\pi}\left(\frac{-\pi^2(-1)^n}{n} - \frac{2}{n^2}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{6\pi(-1)^n}{n^2} + \frac{12}{n^3\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{6\pi(-1)^n}{n^2} + \frac{12(1-(-1)^n)}{n^4\pi}$$

$$= \frac{6n^2\pi^2(-1)^n + 12 - 12(-1)^n}{n^4\pi}$$

$$= \frac{2(3(-1)^n(n^2\pi^2 - 2) + 6)}{n^4\pi}$$

$b_n(\tilde{f}) = 0$ car $\tilde{f}$ impaire

Alors la série est $\frac{\pi^3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(3(-1)^n(n^2\pi^2 - 2) + 6)}{n^4\pi} \cos(nx)$.