1. exp et log

#1 On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **convexe** sur I si $\forall x, y \in I$ et $\forall t \in [0,1]$ on a $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$. On dit que f est **concave** si $-f$ est convexe.

(a) MQ si f est deux fois dérivable et si $f''(x) \geq 0$ sur I, alors f est convexe.

Si $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, alors f' est croissante sur I.

Soient $x, y \in I$ t.q. $x < y$ et posons

$$F : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto F(t) = t f(x) + (1-t) f(y) - f(tx + (1-t)y)$$

Alors
$$\begin{aligned}
F(t) &= (1-t)\big(f(y) - f(tx+(1-t)y)\big) - t\big(f(x) - f(tx+(1-t)y)\big) \\
&= (1-t)t(y-x)\left(\frac{f(y) - f(tx+(1-t)y)}{y - (tx+(1-t)y)}\right) \\
&\qquad - t(1-t)(y-x)\left(\frac{f(tx+(1-t)y) - f(x)}{tx+(1-t)y - x}\right) \\
&= t(1-t)(y-x)\big(f'(\beta) - f'(\alpha)\big) \quad \text{pour } \alpha \in (x, z),\ \beta \in (z, y) \\
&> 0 \qquad\qquad \text{où } z = tx + (1-t)y
\end{aligned}$$

car $t, (1-t), (y-x) > 0$ et $\beta > \alpha$.

Donc $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$. $\square$

(b) MQ exp est convexe sur $\mathbb{R}$ et que log est concave sur $(0, \infty)$.

On a $\exp''(x) = \exp(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, d'où exp est convexe par le (a).

On a $\frac{d^2}{dx^2}(-\log(x)) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \geq 0$ $\forall x \in (0, \infty)$, d'où $-\log$ est convexe $\Rightarrow$ log est concave.

#3 (a) En utilisant les prop. de exp et log, MQ
$e^x = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

On a $\log\left(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n\right) = \lim_{n\to\infty} \log((1+\frac{x}{n})^n)$ car log est continue

$$= \lim_{n\to\infty} n \log(1+\frac{x}{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x}{n} + o(\frac{x}{n})\right) \quad \text{dév. limité}$$

$$= \lim_{n\to\infty} x + o(\frac{x}{n}) = x$$

Comme $\log(e^x) = x$ et comme log est injective, on conclut que $e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$.

(b) Calculer les limites suivantes.

i) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2+2n-1}\right)^{\frac{1}{n^2}} := L$

On a $\log\left(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2+2n-1})^{\frac{1}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\log\left(1+\frac{2}{n^2+2n-1}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{n^2+2n-1} + o\left(\frac{2}{n^2+2n-1}\right)\right)$$

$$= 0.$$

Alors $L = \exp(0) = 1$.

ii) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{\sqrt{n(n+1)}} := L$

On a $\log\left(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n}{n^2+1})^{\sqrt{n^2+n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}\,\log\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}\left(\frac{n}{n^2+1} + o\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt{1+1/n}}{n^2+1} + o\left(\frac{n^2\sqrt{1+1/n}}{n^2+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+1/n}}{1+1/n^2} + o\left(\frac{\sqrt{1+1/n}}{1+1/n^2}\right)$$

$$= 1 \quad \Rightarrow L = \exp(1) = e.$$

(iii) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{b_n}$, où $a_n \to \infty$ et $\frac{b_n}{a_n} \to 1$ lorsque $n\to\infty$.

On a $\log(L) = \lim_{n\to\infty} b_n \log(1+\frac{1}{a_n}) = \lim_{n\to\infty} b_n\left(\frac{1}{a_n} + o(\frac{1}{a_n})\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} + o\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = 1 \Rightarrow L = \exp(1) = e.$$

#5 (Inégalité de Grönwall) Soient $f, g : [a,b] \to [0,\infty)$ continues.
MQ si $\exists C \geqslant 0$ t.q. $f(x) \leqslant C + \int_a^x fg \quad \forall x \in [a,b]$, alors
$f(x) \leqslant C \exp\left(\int_a^x g\right)$.

Posons $h(x) = \dfrac{C + \int_a^x fg}{\exp(\int_a^x g)}$. Alors h est dérivable et

$$h'(x) = \frac{f(x)g(x)\exp\left(\int_a^x g\right) - g(x)\exp\left(\int_a^x g\right)\left(C + \int_a^x fg\right)}{\left(\exp\left(\int_a^x g\right)\right)^2}$$

$$= \underbrace{g(x)}_{\geqslant 0}\left(\frac{\overbrace{f(x) - C - \int_a^x fg}^{\leqslant 0}}{\underbrace{\exp\left(\int_a^x g\right)}_{\geqslant 0}}\right) \leqslant 0 \text{ par hyp.}$$

Donc $\forall x \geqslant a$, $h(x) \leqslant h(a) = C \Rightarrow C + \int_a^x fg \leqslant C\exp\left(\int_a^x g\right)$

$\Rightarrow f(x) \leqslant C\exp\left(\int_a^x g\right) \quad \forall x \in [a,b]$.

#7 Soit $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dérivable t.q. $f(xy) = f(x) + f(y)$. On suppose que $f'(1) > 0$ et on pose $C = e^{\frac{1}{f'(1)}}$.

(a) MQ $f(1) = 0$.

On a, $\forall x \in (0,\infty)$, $f(x) = f(1\cdot x) = f(1) + f(x) \Rightarrow f(1) = f(x) - f(x) = 0$.

(b) MQ $xf'(x) = f'(1)$.

On a
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x(1+\frac{h}{x})) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) + f(1+\frac{h}{x}) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+\frac{h}{x}) - f(1)}{h/x} \cdot \frac{1}{x}$$
$$= f'(1)\cdot\frac{1}{x}$$

Donc $xf'(x) = f'(1)$.

(c) MQ $f(x) = \frac{\log x}{\log C}$, i.e. $f(x) = \log_C x$.

En intégrant la formule du (b), on a
$$\underbrace{f(x) - f(1)}_{\text{}}\!\!\!\!\!\!\underbrace{}_{=0} = \int_1^x f'(t)\,dt = \int_1^x \frac{f'(1)}{t}\,dt = f'(1)\log x$$
$$= \frac{\log x}{1/f'(1)} = \frac{\log x}{\log C}$$

2. sin et cos

#8 Montrer à l'aide de la définition de sinus et cosinus que

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

On a $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \lim_{x\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} \right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 0^{2k}}{(2k+1)!} \quad \text{par continuité}$$

$$= 1, \text{ tel que désiré.}$$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

On a $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

$$= \lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-2}}{(2k)!}$$

$$= \lim_{x\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2} x^{2k}}{(2k+2)!}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2} x^{2k}}{(2k+2)!}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2} 0^{2k}}{(2k+2)!} \quad \text{par continuité}$$

$$= \frac{1}{2}, \text{ tel que désiré.}$$

#10 (a) Montrer les identités $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

Vu en classe : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Alors $\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos(a+b) + \cos(a+(-b))$

$$= \cos a \cos b - \cancel{\sin a \sin b} + \cos a \cos(-b) - \cancel{\sin a \sin(-b)}$$

$$= 2\cos a \cos b$$

$\cos(a-b) - \cos(a+b) = \cdots = 2 \sin a \sin b.$

(b) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Calculer $\int \cos(ax)\cos(x)\,dx$.

On a $\int \cos(ax)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos(ax)\cos(x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(ax+x) + \cos(ax-x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \cos((a+1)x)\,dx + \int \cos((a-1)x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\sin((a+1)x)}{a+1} - \frac{\sin((a-1)x)}{a-1}\right) + C$$

#12 (a) Pour tout k, MQ $\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(kx)$

On a $\sin(a+b) - \sin(a-b) = \sin a \cancel{\cos b} + \cos a \sin b - \sin \cancel{a \cos(-b)} - \cos(a)\sin(-b)$

$$= 2\cos(a)\sin(b)$$

Alors $\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x) = \sin(kx + \frac{x}{2}) - \sin(kx - \frac{x}{2})$

$$= 2\cos(kx)\sin(\frac{x}{2})$$

(b) En déduire que $\frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}$

On a

$$\frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})} \sum_{k=1}^{n} 2\sin(\frac{x}{2})\cos(kx)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})} \left(\sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin((1-\frac{1}{2})x)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} - \frac{\cancel{\sin(\frac{x}{2})}}{2\cancel{\sin(\frac{x}{2})}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

(c) En utilisant une technique semblable, MQ

$$\sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

$$\cos((k-\frac{1}{2})x) - \cos((k+\frac{1}{2})x) = 2\sin(kx)\sin(\frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})} \sum_{k=1}^{n} 2\sin(kx)\sin(\frac{x}{2})$$

$$= \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos((k-\frac{1}{2})x) - \cos((k+\frac{1}{2})x)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})} \left(\cos(\frac{x}{2}) - \cos((n+\frac{1}{2})x)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}\Big(\cancel{\cos(\frac{n+1}{2}x)\cos(\frac{-n}{2}x)} - \sin(\frac{n+1}{2}x)\sin(\frac{-n}{2}x) -$$

$$\left(\cancel{\cos(\frac{n+1}{2}x)\cos(\frac{n}{2}x)} - \sin(\frac{n+1}{2}x)\sin(\frac{n}{2}x)\right)\Big)$$

$$= \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}\left(2\sin(\frac{n+1}{2}x)\sin(\frac{n}{2}x)\right) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

b) (Lemme d'Abel) Soit (b_n) une suite décroissante et positive. Soit (a_n) une suite telle qu'il existe M, m tels que

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M$$

pour tout n. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq M b_1.$$

Ensuite, montrer que pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on a

$$|a_k b_k + \cdots + a_n b_n| \leq (M - m) b_k.$$

#30 Soit (a_n) dont la suite des sommes partielles est bornée et (b_n) t.q. $b_n \downarrow 0$. MQ la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Soient m, M t.q. $m \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leqslant M \quad \forall k \geqslant 1$.

On a

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \leqslant \lim_{N\to\infty} \left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \overset{\text{lemme d'Abel}}{\leqslant} \lim_{N\to\infty} (M-m) b_1 < \infty$$

Donc la série converge.

#13 (a) MQ la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ converge unif. sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $(a_n) = (\sin(nx))$ et $(b_n) = (\frac{1}{n})$. Alors $b_n \downarrow 0$ et $\forall N \geqslant 1$,

$$\left|\sum_{k=1}^{N} a_k\right| = \sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(Nx)$$
$$= \left|\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)\sin(\frac{N}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\right|$$

Sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, on a $\sin(\frac{x}{2}) > 0$ et

$$\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \pi.$$

On a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, d'où le minimum de $\sin(\frac{x}{2})$ est atteint aux bornes et égale $\sin(\frac{\varepsilon}{2}) = \sin(\frac{2\pi - \varepsilon}{2}) > 0$.

Alors $\left|\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\right| \leqslant \frac{1}{\sin(\frac{\varepsilon}{2})} \quad \forall x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

Alors, par le #30, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ converge $\forall x$.

De plus, on a

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]} \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \right|$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sup_{x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \right|$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sup_{x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]} \left| \lim_{K\to\infty} \sum_{n=N+1}^{K} \frac{\sin(nx)}{n} \right|$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sup_{x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]} \left| \lim_{K\to\infty} \frac{2}{\sin(\frac{\varepsilon}{2})} b_{N+1} \right|$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{2b_N}{\sin(\frac{\varepsilon}{2})} = 0 \quad \text{car} \quad b_n \downarrow 0.$$

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ conv. unif. sur $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$.

(b) MQ lorsque $x = \frac{\pi}{N}$, alors

$$\left|\sum_{k=N}^{2N} \sin(kx)\right| = \left|\sum_{k=0}^{N} \sin(kx)\right| \geq \frac{N}{\pi} \quad \forall N \text{ assez grand.}$$

Conclure que

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} \left| \sum_{k=N}^{2N} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \geq \frac{1}{2\pi}$$

et que la série (*) ne converge pas unif. sur $[0, 2\pi]$.

On a

$$\left| \sum_{k=N}^{2N} \sin\left(k\frac{\pi}{N}\right) \right| = \left| \sum_{k=0}^{N} \sin\left((k+N)\frac{\pi}{N}\right) \right| = \left| \sum_{k=0}^{N} \sin\left(k\frac{\pi}{N} + \pi\right) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{N} -\sin\left(k\frac{\pi}{N}\right) \right| = \left| \sum_{k=1}^{N} \sin\left(k\frac{\pi}{N}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\cdot\frac{\pi}{N}\right)\sin\left(\frac{N}{2}\cdot\frac{\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)} \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)} \right|$$

$$= \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)} \right| = \left| \frac{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2N}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2N}\right)^4 - \cdots}{\frac{\pi}{2N} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2N}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2N}\right)^5 - \cdots} \right|$$

$$\geq \left| \frac{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2N}\right)^2}{\pi/2N} \right| \underset{\text{pour } N > \frac{2}{\pi}}{\geq} \frac{1/2}{\pi/2N} = \frac{N}{\pi}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,2\pi]} \left| \sum_{n=N}^{2N} \frac{\sin(nx)}{n} \right| \geq \frac{1}{\pi} \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sup_{x\in[0,2\pi]} \left| \sum_{n=0}^{2N} \frac{\sin(nx)}{n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} \right| \neq 0$$

$\Rightarrow$ sommes partielles pas de Cauchy.

#14 On suppose qu'il existe un nombre i tel que $i^2=-1$. On pose $f(x)=e^{ix}$.

(a) « Montrez » que f est une solution de $y''+y=0$.

On a $f''(x)+f(x) = i^2 e^{ix} + e^{ix} = -e^{ix}+e^{ix} = 0$.

(b) Déduire que $f(x) = \cos(x) + i\sin(x)$

Par un résultat vu en classe, on sait que toute solution à $y''+y=0$ est de la forme $f(x)=A\cos(x)+B\sin(x)$ avec, de plus, $A=f(0)$ et $B=f'(0)$.

Pour la solution $f(x)=e^{ix}$, on a $f(0)=e^{i\cdot 0}=1$ et $f'(0)=ie^{i\cdot 0}=i$, d'où $f(x)=\cos(x)+i\sin(x)$, tel que désiré.

#15 (Polynômes de Tchebychev) Soient

$$f_n(x) = \cos(n\arccos(x)) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

MQ $\forall n$, f_n et g_n sont des polynômes.

Montrons-le par induction:

Base $n=0$. $\cos(0\cdot\arccos(x))=1$ et $\dfrac{\sin(0\cdot\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

$n=1$. $\cos(1\cdot\arccos(x)) = x$

et $$\frac{\sin(1\cdot\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x=\cos\theta}{=} \frac{\sin(\arccos(\cos\theta))}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}} = 1$$

É.I. Supposons que $f_{n-1}(x) = \cos((n-1)\arccos(x))$ et $g_{n-1}(x) = \dfrac{\sin((n-1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ sont des polynômes. Alors

$$\begin{aligned} f_n(x) = \cos(n\arccos(x)) &= \cos((n-1)\arccos x + \arccos(x)) \\ &= \cos((n-1)\arccos x)\cos(\arccos(x)) \\ &\quad - \sin((n-1)\arccos(x))\sin(\arccos x) \end{aligned}$$

$$= x f_{n-1}(x) - (1-x^2)\, g_{n-1}(x),$$

qui est un polynôme par l'hyp. d'ind. Similairement,

$$g_n(x) = \frac{\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(\sin((n-1)\arccos x)\cos(\arccos x)$$
$$- \cos((n-1)\arccos x)\sin(\arccos x)\Big)$$
$$= g_{n-1}(x)\cdot x - f_{n-1}(x)\cdot 1,$$

qui est aussi un polynôme.

3. tan et arctan

#17 MQ $\arctan(x)$ est analytique sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Alors

$$\frac{1}{1+(a+x)^2} = \frac{1}{1+a^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2ax+x^2}{1+a^2}\right)} = \frac{1}{1+a^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2ax+x^2}{1+a^2}\right)^k \quad \text{pour } \left|\frac{2ax+x^2}{1+a^2}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{1+a^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2ax}{1+a^2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x^2}{1+a^2}\right)^k\right) \quad \text{par conv. abs.}$$

Alors
$$\arctan(a+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+(a+t)^2} + \arctan(a)$$

$$= \frac{1}{1+a^2}\left(\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2at}{1+a^2}\right)^k dt + \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{t^2}{1+a^2}\right)^k dt\right) + \arctan(a)$$

$$= \frac{1}{1+a^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-2a}{1+a^2}\right)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1+a^2}\right)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right) + \arctan(a)$$

Alors en réarrangeant les termes on obtient une expression en série entière pour $\arctan(x)$ autour de a, donnée par

$$\arctan(x) = \frac{1}{1+a^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-2a}{1+a^2}\right)^k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1+a^2}\right)^k \frac{(x-a)^{2k+1}}{2k+1}\right) + \arctan(a)$$

Si $a=0$, alors $\forall x$ t.q. $|x|<1$,

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{par conv. unif. sur } [0,x] \text{ ou } [x,0]$$

On conclut que $\arctan(x)$ est analytique sur $\mathbb{R}$.

#19 Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on pose $I_n = \int \sec^n x \, dx$. Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a $I_n = \dfrac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} - \dfrac{n-2}{n-1} I_{n-2}$.

Soit $n \geqslant 2$. Alors,

IPP: $u = \sec^{n-2} x$, $dv = \sec^2 x \, dx$, $v = \tan x$, $du = (n-2)\sec^{n-2} x \tan x \, dx$

$$\begin{aligned}
I_n = \int \sec^n x \, dx &= \int \sec^2 x \sec^{n-2} x \, dx \\
&= \tan x \sec^{n-2} x - \int (n-2) \sec^{n-2} x \tan^2 x \, dx \\
&= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \, (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^n x + (n-2) \int \sec^{n-2} x \\
&= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) I_n + (n-2) I_n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_n + (n-2) I_n = \tan x \sec^{n-2} x + (n-2) I_{n-2} \Rightarrow I_n = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2},$$

tel que désiré.

#20 MQ $\forall x \neq \frac{1}{y}$, on a $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.

Soient $a, b \in (-\pi/2, \pi/2)$ t.q. $x = \tan a$, $y = \tan b$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\arctan(x) + \arctan(y) &= \arctan(\tan a) + \arctan(\tan b) \\
&= a + b \\
&= \arctan(\tan(a+b)) \\
&= \arctan\left(\frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)
\end{aligned}$$

4. cosh et sinh

#21 (a) MQ $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est inversible.

Comme $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, on sait que sinh est strictement croissante. En particulier, elle est injective.

De plus,

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} \sinh x = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

Alors par le TVM, on conclut que sinh est surjective.

(Détails : soit $y \in \mathbb{R}$. Par le calcul des deux limites ci-haut, on sait que $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $\sinh x_1 < y < \sinh x_2$. Comme sinh est continue sur $[x_1, x_2]$ ($x_1 < x_2$ car sinh est str. croissante), on conclut qu'il existe $x \in [x_1, x_2]$ t.q. $\sinh x = y$. Alors $y \in \operatorname{Im} \sinh$.)

Donc $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection, et est donc inversible.

(b) On note l'inverse de sinh par argsinh. MQ $\operatorname{argsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2+1})$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ t.q. $y = \sinh x$. Alors $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $x = \operatorname{argsinh} y$, d'où

$$\begin{aligned}
y = \frac{1}{2}\left(e^{\operatorname{argsinh} y} - e^{-\operatorname{argsinh} y}\right) &\Leftrightarrow 2y e^{\operatorname{argsinh} y} = e^{2 \operatorname{argsinh} y} - 1 \\
&\Leftrightarrow e^{2\operatorname{argsinh} y} - 2y e^{\operatorname{argsinh} y} - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow z^2 - 2y z - 1 = 0 \quad \text{où } z = e^{\operatorname{argsinh} y} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{-(-2y) \pm \sqrt{4y^2 - 4(-1)(1)}}{2(1)} \\
&\qquad = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}
\end{aligned}$$

Comme $y - \sqrt{y^2+1} \leqslant 0$ et $e^{\operatorname{argsinh} y} > 0$, on conserve seulement la solution $z = y + \sqrt{y^2+1}$. Alors $\operatorname{argsinh} y = \log(e^{\operatorname{argsinh} y}) = \log(y + \sqrt{y^2+1})$.

(c) MQ $\operatorname{argsinh}(y) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

Par le thm des fonctions inverses (analyse 1), on a

$$\frac{d}{dy}\operatorname{argsinh}(y) = \frac{1}{\sinh'(x)}$$ où $\sinh(x) = y$, si $\sinh'(x) \neq 0$

$$= \frac{1}{\cosh(x)}$$ (ok car $\cosh(x) > 0$)

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(x)+1}}$$ car $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

Alors, par le TFC2, on a

$$\operatorname{argsinh}(y) = \operatorname{argsinh}(y) - \operatorname{argsinh}(0) = \int_0^y \operatorname{argsinh}'(t)\,dt = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

(d) Résoudre l'intégrale suivante en terme de argsinh :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+10}}$$

On commence par réécrire $2x^2+4x+10 = (\sqrt{2}x+\sqrt{2})^2+8$. Alors

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2}x+\sqrt{2})^2+8}} = \int \frac{du}{\sqrt{2}\sqrt{u^2+8}} = \int \frac{\sqrt{8}\,dv}{\sqrt{2}\sqrt{8v^2+8}}$$

$u = \sqrt{2}x+\sqrt{2}$, $du = \sqrt{2}\,dx$; $v = \frac{u}{\sqrt{8}}$, $dv = \frac{1}{\sqrt{8}}du$

$$= \int \frac{\cancel{\sqrt{8}}\,dv}{\sqrt{2}\cancel{\sqrt{8}}\sqrt{v^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{argsinh}(v) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{argsinh}\left(\frac{u}{\sqrt{8}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{argsinh}\left(\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{argsinh}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

#22 On suppose qu'il existe un nombre i t.q. $i^2 = -1$.

(a) « Montrez » que $f(x) = \sinh(ix)$ est une solution de $y'' + y = 0$.

On a $\sinh''(ix) + \sinh(ix) = i\cosh'(ix) + \sinh(ix) = \underbrace{i^2}_{=-1}\sinh(ix) + \sinh(ix) = 0$.

(b) Déduire que $\sinh(ix) = i\sin(x)$.

On sait que toutes les solutions à $f'' + f = 0$ sont données par $f(x) = f'(0)\sin(x) + f(0)\cos(x)$. Comme $\sinh(i\cdot 0) = 0$ et $\frac{d}{dx}\sinh(ix)\Big|_{x=0} = i\cosh(i\cdot 0) = i$, on obtient $\sinh(ix) = i\sin(x)$.

(c) Trouver une expression pour $\cosh(ix)$ en terme de $\cos(x)$.

On vérifie de la même façon que $\cosh(ix)$ est une solution de $f'' + f = 0$.

On a $\cosh(i\cdot 0) = 1$ et $\cosh'(ix)\Big|_{x=0} = i\sinh(i\cdot 0) = 0$, d'où $\cosh(ix) = \cos(x)$.