Analyse 2

Examen final – automne 2022

Faculté des arts et des sciences – Département de mathématiques et de statistique

Enseignant : Jonathan Godin
Signle : MAT2050A
Date : jeudi le 15 décembre 2022

L'examen dure 170 minutes. Vous n'avez droit à aucun matériel, autre qu'un crayon (ou un stylo) et une efface. **Justifiez vos réponses.**

$/55$

Vous pouvez utiliser les formules suivantes au besoin :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a.$$

Exercice 1. (10pts) Montrer que sin n'est pas une fonction rationnelle, c'est-à-dire qu'il n'existe aucuns polynômes p, q tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Exercice 2. (10pts) Soit $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(xy) = f(x) + f(y)$. On suppose que $f'(1) > 0$ et on pose $a = \exp\left(\frac{1}{f'(1)}\right)$. Montrer que $f(x) = \log_a x$ pour tout $x > 0$.

Indice. Attention, vous ne pouvez pas utiliser directement le TFC2. Voyez-vous pourquoi ? Vous pouvez définir une fonction g bien choisie et calculer g' ou bien argumenter que le TFC2 s'applique.

Exercice 3. (10pts) Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_n \to \infty$ et $\frac{b_n}{a_n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$. Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{b_n}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right)$

(Suite au verso)

Exercice 4. (15pts) a) Montrer que $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big)$.

b) Calculer la série de Fourier de $f(x) = \cos\big(\frac{x}{2}\big)$. Est-ce qu'elle converge uniformément vers f ?

c) Donner la série de Fourier $g(x) = \sin\big(\frac{x}{2}\big)$ à partir de celle de f. (Remarquer que $g(x) = -2f'(x)$.) Si vous n'avez pas pu faire le b), donnez votre réponse en terme de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$. Justifiez bien.

Exercice 5. (10pts) Soit $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soit (s_n) la suite des sommes partielles :

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_n \cos(nx) + \sum_{k=1}^{n} b_n \sin(nx),$$

où $a_n := a_n(f)$ et $b_n := b_n(f)$. On suppose que $s_n \to f$ uniformément sur $[-\pi,\pi]$.

a) Montrer que $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(s_n - f)^2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

b) Montrer que $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(s_n f)$ et $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n^2$ valent toutes les deux

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_n^2 + \sum_{k=1}^{n} b_n^2.$$

c) Déduire l'égalité de Parseval, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

(Remarque : dans f^2 et s_n^2, le $\cdot^2$ signifient « élevée au carré ».)