Analyse 2

Série 5, partie 1
Séries de Fourier

Exercice 1. Calculer la série de Fourier des fonctions $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ suivantes.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \le x \le \pi \\ 0, & \text{si } -\pi \le x \le 0 \end{cases}$

Exercice 2. Soit $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi \le x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Étudier la convergence uniforme de la série de Fourier de f.

Exercice 3. a) Montrer que pour $f, g\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ intégrable, on a $c_n(f+g) = c_n(f)+c_n(g)$ et $c_n(Cf) = Cc_n(f)$, où C est une constante.

b) Montrer que si f est une constante, alors $c_n(f) = 0$ pour tout $n \neq 0$.

c) Calculer la série de Fourier de $f(x) = x + \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4. Soit $c \in (0,\pi)$ et $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le |x| \le c, \\ 0, & \text{si } c < |x| \le \pi. \end{cases}$$

a) Calculer la série de Fourier de f.

b) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nc)}{n} = \frac{\pi - 2c}{2}.$$

Exercice 5. Soit $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{(\pi^2 x - x^3)}{3}.$$

a) Déterminer la série de Fourier de f.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$. (Utilisez l'égalité de Parseval (numéro 8).)

Exercice 6. On suppose qu'il existe une fonction intégrable $\delta\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ telle que pour toute fonction $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ intégrable et continue en 0, on ait $\int_{-\pi}^{\pi} f\delta = f(0)$. (Une telle fonction n'existe pas, mais on suppose que oui, pour l'exercice.)

a) Calculer les coefficients de la série de Fourier de δ. Montrer que sa série de Fourier est

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} D_N.$$

b) Cette série de Fourier converge-t-elle?

c) Montrer que[1] pour toute fonction $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continûment dérivable, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f D_N = f(0).$$

Indice. Inspirez-vous de la démonstration du théorème de convergence d'une série de Fourier.

Exercice 7. (Densité des polynômes trigonométriques). Soit $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et régulière par morceaux. Montrer que si $f(-\pi) = f(\pi)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique s_n tel que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f - s_n)^2 < \varepsilon.$$

(Cet énoncé est vrai sans l'hypothèse de la régularité par morceaux, mais on ne peut pas le montrer dans ce cours.)

[1] C'est l'énoncé le plus proche de $\frac{1}{2\pi} D_N \to \delta$ que l'on puisse donner dans un cours d'analyse 2. En effet, on peut voir la conclusion du numéro comme une forme faible de convergence.

Exercice 8. Soit $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et régulière par morceaux telle que $f(-\pi) = f(\pi)$.

a) Soit s_n les sommes partielles de la série de Fourier de f. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (s_n - f)^2 = 0.$$

b) (Égalité de Parseval). Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2.$$