Analyse 2

Série 5, partie 1

Séries de Fourier

Exercice 1. Calculer la série de Fourier des fonctions $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ suivantes.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$

Solution. On utilisera le fait que $e^{in\pi} = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Ceci se voit du fait que

$$e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i\sin(n\pi) = (-1)^n + i0 = (-1)^n.$$

a) Pour $c_0(x^3)$, on trouve 0, car la fonction est impaire.

Ensuite pour $c_n(x^3)$, on doit intégrer trois fois par partie. On utilise le tableau suivant

u	x^3	$-3x^2$	$6x$	-6	0
$\mathrm{d}v$	e^{-inx}	$\frac{e^{-inx}}{-in}$	$\frac{e^{-inx}}{-n^2}$	$\frac{e^{-inx}}{in^3}$	$\frac{e^{-inx}}{n^4}$

On obtient ensuite

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(x^3) &= \int_{-\pi}^{\pi} x^3 e^{-inx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3e^{-inx}}{-in}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{3x^2e^{-inx}}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{6xe^{-inx}}{in^3}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{6e^{-inx}}{n^4}\bigg|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2i\pi^3(-1)^n}{n} + 0 - \frac{12i\pi(-1)^n}{n^3} - 0. \end{aligned}$$

La série de Fourier est donc

$$S(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i\pi^2(-1)^n}{n} - \frac{6i(-1)^n}{n^3}\right)e^{inx} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} i\left(\frac{\pi^2n^2 - 6}{n^3}\right)(-1)^n e^{inx}.$$

Si on veut exprimer la série en terme de sinus (il n'y a pas de cosinus, puisque la fonction est impaire), on utilise $b_n = -2\Im c_n$. On trouve donc

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi^2n^2 - 12}{n^3}\right)(-1)^{n+1}\sin(nx).$$

Exercice 2. Soit $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{si } -\pi\le x<0,\\ 1, & \text{si } 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Étudier la convergence uniforme de la série de Fourier de f.

Solution. On calcule d'abord les coefficients de la série de Fourier. On a

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0,$$

car f est impaire.

Ensuite, pour $n\ge 1$, on a

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-inx}\mathrm{d}x-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}e^{-inx}\mathrm{d}x=i\frac{(-1)^n-1}{n\pi}.$$

Puisque tous les c_n sont imaginaires pures, on déduit que

$$a_n=0 \qquad \text{et} \qquad b_n=2i\Im c_n=-\frac{2}{n\pi}((-1)^n-1).$$

On obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{inx}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n\pi}\sin(2nx).$$

On a vu à l'exercice 9b) de la série 4 que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

ne converge pas uniformément sur $[0,2\pi]$. En fait, en répétant la démarche du 9b) avec $x=\frac{\pi}{2N}$, on obtient que la série ne converge pas uniformément.

Exercice 3. a) Montrer que pour $f,g\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ intégrable, on a $c_n(f+g)=c_n(f)+c_n(g)$ et $c_n(Cf)=Cc_n(f)$, où C est une constante.

b) Montrer que si f est une constante, alors $c_n(f)=0$ pour tout $n\neq 0$.

c) Calculer la série de Fourier de $f(x)=x+\frac{\pi}{4}$.

Exercice 4. Soit $c \in (0, \pi)$ et $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le |x| \le c, \\ 0, & \text{si } c < |x| \le \pi. \end{cases}$$

a) Calculer la série de Fourier de f.

b) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nc)}{n} = \frac{\pi - 2c}{2}.$$

Solution. a) D'abord, notons que f est paire, donc les coefficients b_n sont nuls. Calculons directement les a_n. (Dans ce cas, ce serait du travail superflu que de calculer les c_n.)

Pour les intégrales suivantes, il est suffisant de calculer sur l'intervalle $[0, c]$, puisque f est pair. On a

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^c \mathrm{d}x = \frac{c}{\pi}.$$

Ensuite, on a

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^c \cos(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} \bigg|_0^c = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(cn)}{n}.$$

La série est donc

$$\frac{c}{\pi} + \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(cn)}{n} \cos(nx).$$

b) On voit que f est régulière par morceaux. Par le théorème de convergence, on a

$$\frac{c}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(cn)}{n} \cos(nx) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (-c, c) \\ 0, & \text{si } |x| \in (c, \pi] \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x \in \{-c, c\}. \end{cases}$$

En $x = c$, on trouve

$$\frac{\pi - 2c}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(cn)\cos(cn)}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2cn)}{n}.$$

Exercice 5. Soit $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{(\pi^2 x - x^3)}{3}.$$

a) Déterminer la série de Fourier de f.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$. (Utilisez l'égalité de Parseval (numéro 8).)

Solution. On utilise le numéro 3a) pour voir que

$$c_n(f) = \tfrac{\pi^2}{3} c_n(x) - \tfrac{1}{3} c_n(x^3).$$

On connaît déjà $c_n(x)$ (exemple en classe) et $c_n(x^3)$ (numéro 1a). On a donc

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{\pi^2}{3} \frac{i(-1)^n}{n} - \frac{1}{3} i \left(\frac{\pi^2 n^2 + 6}{n^3} \right) (-1)^n \\ &= \frac{(-1)^n i}{3} \left(\frac{\pi^2 n^2 - \pi^2 n^2 - 6}{n^3} \right) \\ &= \frac{(-1)^n i}{3} \left(\frac{-6}{n^3} \right) \\ &= \frac{2i(-1)^{n+1}}{n^3} \end{aligned}$$

La série de Fourier est donc

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2i(-1)^{n+1}}{n^3} e^{inx}.$$

a) Par l'égalité de Parseval (exercice 8b), on a d'une part

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi^2 x - x^3}{3} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{18\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^4 x^2 - 2\pi^2 x^4 + x^6) \mathrm{d}x = \frac{8\pi^6}{945}.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{4}{n^6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^6}.$$

En combinant, on conclut que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Exercice 6. On suppose qu'il existe une fonction intégrable $\delta \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ telle que pour toute fonction $f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ intégrable et continue en 0, on ait $\int_{-\pi}^{\pi} f\delta = f(0)$. (Une telle fonction n'existe pas, mais on suppose que oui, pour l'exercice.)

a) Calculer les coefficients de la série de Fourier de δ. Montrer que sa série de Fourier est

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi} D_N.$$

b) Cette série de Fourier converge-t-elle?

c) Montrer que[1] pour toute fonction $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ continûment dérivable, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f D_N = f(0).$$

Indice. Inspirez-vous de la démonstration du théorème de convergence d'une série de Fourier.

Solution. a) Pour $n = 0$, on a

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta = \frac{1}{2\pi}.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}e^0 = \frac{1}{2\pi}.$$

b) La série diverge. En effet, on a vu en classe (ou exercice 8b), pour $x \neq 0$, que

$$\frac{1}{2\pi}D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\Big(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\Big)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Il est clair que la limite diverge lorsque $N \to \infty$. Pour $x = 0$, on a

$$\frac{1}{2\pi}D_N(x) = \frac{N}{\pi}$$

et on voit que cela diverge lorsque $N \to \infty$.

c) Il s'agit de reproduire la démonstration du théorème de convergence qu'on a vu en classe. C'est un peu plus simple, puisque l'hypothèse est plus forte. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f D_n - f(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f D_N - f(0)D_N\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f - f(0))D_N\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f - f(0))\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(0))\frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(f(x) - f(0))(e^{-ix} - 1)}{|e^{ix} - 1|^2}\left(e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}\right)\mathrm{d}x. \qquad (*)
\end{aligned}$$

[1] C'est l'énoncé le plus proche de $\frac{1}{2\pi}D_N \to \delta$ que l'on puisse donner dans un cours d'analyse 2. En effet, on peut voir la conclusion du numéro comme une forme faible de convergence.

On pose $h(x) = \frac{(f(x)-f(0))(e^{-ix}-1)}{|e^{ix}-1|^2}$. Il suffit de voir que $\Re h$ et $\Im h$ sont intégrables. Le seul problème possible est en 0. La règle de l'Hôpital nous montre que

$$\lim_{x\to 0} \Re h = \lim_{x\to 0} \frac{(f(x)-f(0))(\cos x - 1)}{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-(f(x)-f(0))\sin x + f'(x)(\cos x - 1)}{-2(\cos x - 1)\sin x + 2\sin x \cos x} = 0$$

et que

$$\lim_{x\to 0} \Im h = \lim_{x\to 0} \frac{-(f(x)-f(0))\sin x}{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-(f(x)-f(0))\cos x - f'(x)\sin x}{-2(\cos x - 1)\sin x + 2\sin x \cos x} = -f'(0).$$

(Remarquez que l'on aurait pu directement faire

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{e^{ix}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{ie^{ix}} = \frac{f'(0)}{i} = -if'(0),$$

ce qui donne bien entendu la même chose.)

Puisque h est intégrable, l'équation $(*)$ devient

$$c_{-N-1}(\Re h) - c_N(\Re h) + c_{-N-1}(\Im h) - c_N(\Im h).$$

On sait que ces quantités tendent vers 0 lorsque $N \to \infty$.

Exercice 7. (Densité des polynômes trigonométriques). Soit $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et régulière par morceaux. Montrer que si $f(-\pi) = f(\pi)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique s_n tel que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f - s_n)^2 < \varepsilon.$$

(Cet énoncé est vrai sans l'hypothèse de la régularité par morceaux, mais on ne peut pas le montrer dans ce cours.)

Exercice 8. Soit $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et régulière par morceaux telle que $f(-\pi) = f(\pi)$.

a) Soit s_n les sommes partielles de la série de Fourier de f. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (s_n - f)^2 = 0.$$

b) (Égalité de Parseval). Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2.$$

Solution. a) On sait que $s_n \to f$ uniformément, donc pour $\varepsilon = 1$, il existe N tel que si $n \geq N$, alors

$$(s_n - f)^2 < |s_n - f| < 1.$$

Il s'ensuit que $(s_n - f)^2 \to 0$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$. On peut ainsi échanger la limite avec l'intégrale et obtenir la conclusion.

b) D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k|\leq n} \sum_{|m|\leq n} c_k c_m e^{i(k+m)x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|\leq n} \sum_{|m|\leq n} c_k c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+k)x} \mathrm{d}x \qquad \text{(car les séries conv. unif.)} \\
&= \sum_{|k|\leq n} c_k c_{-k} \\
&= \sum_{|k|\leq n} |c_k|^2.
\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f - s_n)^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^2 - 2fs_n + s_n^2) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2(s_n^2 - s_n f) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \sum_{|k|\leq n} |c_k|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2s_n(s_n - f).
\end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 + 0.$$