Analyse 2

Série 4
Fonctions transcendantes

Exercice 1. On prend pour acquis que la composition de fonctions analytiques est encore analytique là où la composition est possible. (Cela se montre sans problème dans un cours d'analyse complexe.) Montrer que les fonctions suivantes sont analytiques, en donnant chacune le domaine sur lequel elles sont analytiques.

a) $f(x) = \sqrt{1+x}$

b) $f(x) = \frac{1}{1-\cos x}$ (attention aux divisions par 0)

c) $f(x) = x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 2. Montrer à l'aide de la définition de sinus et de cosinus que

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3. À l'égard de tou·te·s les physicien·ne·s, donner un sens mathématique le plus proche possible de ce qu'il est entendu par « $\sin x = x$ lorsque x est petit ».

Exercice 4. Soit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est dérivable.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que pour $x > 0$

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-\frac{1}{x}}.$$

c) Montrer que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

d) Conclure que f ne peut pas s'exprimer comme série entière en 0 et ce, même si la série de Taylor de f en 0 converge.

Exercice 5. Soit P_n un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1. Soit r la longueur d'une apothème et c, la longueur d'un côté.

a) Exprimer l'aire du polygone en fonction de r, c et n.

b) Calculer l'aire du cercle à l'aide du a).

Exercice 6. On considère un hexagone inscrit dans un cercle de rayon 1.

a) Montrer que la longueur d'un côté de l'hexagone est strictement plus petit que la longueur de l'arc de cercle qu'il sous-tend.

b) Montrer que $\pi > 3$.

Exercice 7. Soit la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right).$$

a) Montrer que f converge uniformément vers $\frac{1}{2}\log(x+1)$ sur $[-a, a]$ pour tout $0 < a < 1$.

b) Montrer que $f(1) = \log 2$. (Utiliser le théorème d'Abel, exercice ci-bas.)

Exercice 8. a) Pour tout k, montrer que

$$\sin\left((k+\tfrac{1}{2})x\right) - \sin\left((k-\tfrac{1}{2})x\right) = 2\sin(\tfrac{x}{2})\cos(kx).$$

b) En déduire que

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin(\frac{x}{2})}.$$

c) En utilisant une technique semblable, montrer également que

$$\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Exercice 9. a) Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \qquad (*)$$

converge uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(Vous pouvez prendre pour acquis le test de Dirichlet des exercices supplémentaires.)

b) Montrer que lorsque $x = \frac{\pi}{N}$, alors

$$\left|\sum_{k=N}^{2N} \sin(kx)\right| = \left|\sum_{k=0}^{N} \sin(kx)\right| \geq \frac{N}{\pi}$$

pour tout N assez grand. Conclure que

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} \left|\sum_{k=N}^{2N} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \geq \frac{1}{2\pi}$$

et que la série $(*)$ ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 10. (Polynômes de Tchebychev) Soit

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Montrer que pour tout n, f_n et g_n sont des polynômes.

Exercice 11. (Théorème d'Abel). Soit $\sum a_n$ une série convergente. Montrer que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. (Utilisez le lemme d'Abel pour montrer que si $|a_n + \cdots + a_m| < \varepsilon$, alors $|a_n x^n + \cdots + a_m x^m| < \varepsilon$ pour $x \in [0, 1]$.)

Exercices supplémentaires

Cette section des exercices est optionnelle.

Exercice 12. a) (Sommation par partie) Soit (a_n) et (b_n) deux suites et soit (s_n) la suite des sommes partielles de a_n. Montrer que

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n.$$

b) (Lemme d'Abel) Soit (b_n) une suite décroissante et positive. Soit (a_n) une suite telle qu'il existe M, m tels que

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M$$

pour tout n. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_1m \leq a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq Mb_1.$$

Ensuite, montrer que pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on a

$$|a_kb_k + \cdots + a_nb_n| \leq (M - m)b_k.$$

Exercice 13. (Test de Dirichlet) Soit (a_n) une suite dont la suite des sommes partielles est bornée et (b_n) une suite telle que $b_n \downarrow 0$. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$$

converge.