Analyse 2

Série 3

Séries entières

Exercice 1. Montrer que le rayon de convergence d'une série entière est unique.

Exercice 2. Montrer que le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n x^n$ est donnée par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Solution. On pose

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Cette limite existe ou elle vaut ∞.

Le critère de Cauchy dit que la série $\sum |a_n x^n|$ converge si

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1,$$

c'est-à-dire si

$$|x| < \frac{1}{L}.$$

De plus, cette série diverge si $L > 1$, c'est-à-dire si $|x| > \frac{1}{L}$. On conclut que $R = \frac{1}{L}$. Si $L = \infty$, alors $R = 0$.

Bien que cela ne soit pas nécessaire pour la question, il en vaut peut-être la peine d'en profiter pour rappeler le critère de Cauchy. Si $L < 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $L + \varepsilon < 1$. Il existe $N > 0$ tel que si $n \geq N$, alors

$$\left| \sup_{m\geq n} \sqrt[n]{|a_n|} - L \right| < \varepsilon.$$

Ainsi, on a

$$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \varepsilon < 1$$

pour tout $n \geq N$. On conclut que

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} (L+\varepsilon)^n < \infty,$$

car $L + \varepsilon < 1$. On peut montrer que la série $\sum |a_n|$ diverge si $L > 1$ de la même façon.

Exercice 3. Montrer que la série

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

a pour rayon de convergence $R = \infty$, mais que la série ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Trouver une série entière centrée en 0 pour les fonctions suivantes. Déterminer le rayon de convergence.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Solution. c) On rappelle que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

On a

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

Puisque c'est une série géométrique de rapport $-x$, son rayon de convergence est $R = 1$.

Exercice 5. Trouver une série entière centrée en 0 pour les fonctions suivantes.

a) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t-x}$

b) La solution de $y' = y$, avec $y(0) = 1$. (*Indice*. Supposez qu'il existe une solution de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trouvez les a_n et montrez que la série a un rayon de converge $R > 0$.)

c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$

Solution. b) Soit $f(x) = \sum a_n x^n$. On suppose pour le moment que c'est une série entière convergente et que c'est une solution de $y' = y$. On a donc

$$f'(x) = f(x) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ainsi, par le principe d'identité, on a

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \\ 2a_2 &= a_1 \\ &\vdots \\ na_n &= a_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Puisque $y(0) = 1$, on doit avoir $a_0 = 1$. Ensuite, on a $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2\cdot 3}$, etc. On peut montrer par récurrence (faites-le) que $a_n = \frac{1}{n!}$.

On conclut que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Il est montré au numéro 3 que c'est une série convergente avec un rayon de converge $R = \infty$. Ainsi, il est justifié d'échanger l'ordre de la dérivée et de la série, ce qui veut dire que f est bien une solution de l'équation différentielle.

c) Pour $|x| < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{4n} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}.
\end{aligned}$$

Le rayon de convergen doit être $R = 1$, car pour tout $|x| > 1$, la série diverge. Ceci se voit par le critère, par exemple, de d'Alembert.