Analyse 2

Série 2
Convergence uniforme

Exercice 1. Calculer la limite simple des suites suivantes.

a) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

b) $f_n(x) = x^n e^{-nx}$, $x \in [1, \infty)$

c) $f_n(x) = \tan\left(\frac{x}{n}\right)$

Exercice 2. Calculer la limite simple des suites suivantes. Ensuite, déterminer si la suite converge uniformément.

a) $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ pour $x \in [0, \infty)$.

b) $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ pour $x \in [a, \infty)$, où $a > 0$.

c) $f_n(x) = \sin^n x \cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit (f_n) et (g_n) deux suites qui convergent uniformément respectivement vers f et g sur un intervalle I. On suppose que f et g sont bornées. Montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

Exercice 4. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx), & \text{si } x \in [0, 1/n], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Trouver la limite simple de (f_n).

b) Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$ et $\int_0^1 f$.

c) Déduire que la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 5. Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\tan x)^n \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_2^A \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^n}$, avec $2 < A < \infty$

Exercice 6. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ et avec f_n' continue. Montrer que si $f_n \to f$ simplement sur $\mathbb{R}$ et si pour tout compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$, il existe $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $f_n' \to g$ uniformément sur $[a,b]$, alors f' existe et $f_n'(x) \to f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Montrer que

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} \mathrm{d}x \right) = 0.$$

Exercice 8. On pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty x^k$$

pour $x \in (-1,1)$.

a) Calculer

$$\lim_{x \to -1} f(x).$$

b) Est-ce que $f(-1)$ converge? Ceci est un exemple où l'on ne peut pas échanger la limite avec la série.

Exercice 9. Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}.$$

a) Montrer que la série de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'elle ne converge pas absolument.

Exercice 10. Montrer que $f'(x)$ existe pour tout x, où f est la série de l'exercice précédent.

Exercice 11. Soit la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{n^2+x^2}.$$

a) Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la série converge uniformément sur $[0,R]$ pour tout $R > 0$.

c) Montrer que $f'(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.