Analyse 2

Série 2

Convergence uniforme

Exercice 1. Calculer la limite simple des suites suivantes.

a) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

b) $f_n(x) = x^n e^{-nx}$, $x \in [1, \infty)$

c) $f_n(x) = \tan\left(\frac{x}{n}\right)$

Solution. a) Pour $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{\sin(nx)}{nx}\right| \leq \frac{1}{n|x|},$$

donc la suite tend vers 0. Pour $x = 0$, la suite vaut 1 pour tout n. On a donc $f_n \to f$ simplement sur $\mathbb{R}$, où

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2. Calculer la limite simple des suites suivantes. Ensuite, déterminer si la suite converge uniformément.

a) $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ pour $x \in [0, \infty)$.

b) $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ pour $x \in [a, \infty)$, où $a > 0$.

c) $f_n(x) = \sin^n x \cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Solution. a) Pour $x \neq 0$, on a

$$|f_n(x)| \leq e^{-nx} \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Pour $x = 0$, on a que $f_n(0) = 0$ pour tout n. Ainsi, $f_n \to 0$ simplement sur $[0, \infty)$.

Ensuite, on anayse la fonction. On a

$$f_n'(x) = -ne^{-nx}\sin(2nx) + 2ne^{-nx}\cos(2nx).$$

Les points critiques $f_n'(x) = 0$ sur $[0, \infty)$ sont donnés par $-ne^{-nx}\sin(2nx) + 2ne^{-nx}\cos(2nx) = 0$, c'est-à-dire $\tan(2nx) = 2$. D'où $f_n'(x) = 0$ si $x = \frac{\arctan 2}{2n}$.

Enfin, il n'est pas nécessaire de vérifier que c'est le maximum, puisqu'on a

$$\begin{aligned} f_n\left(\tfrac{\arctan 2}{2n}\right) &= e^{-n\frac{\arctan 2}{2n}} \sin\left(2n\frac{\arctan 2}{2n}\right) \\ &= e^{\frac{-\arctan 2}{2}} \sin(\arctan 2). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\sup_{[0,\infty)} |f_n(x)| \geq e^{\frac{-\arctan 2}{2}} \sin(\arctan 2) > 0 \qquad \text{pour tout } n.$$

Conclusion : $\sup_{[0,\infty)} |f_n(x)| \not\to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Remarque. On aurait pu sauver du temps en remarquant que

$$\sup_{[0,\infty)} |f_n(x)| \geq f_n\big(\tfrac{1}{n}\big) = e^{-1} \sin(2) > 0 \qquad \text{pour tout } n.$$

b) On a

$$\sup_{[a,\infty)} |f_n(x)| \leq \frac{1}{(1+a)^n} \to 0$$

lorsque $n \to \infty$, donc $f_n \to 0$ uniformément.

c) On voit que $f_n \to 0$ simplement, puisque $\sin^n x \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pourvu que $\sin x \neq 1$. Si $\sin x = 1$, alors $\cos x = 0$, donc $f_n = 0$ dans ce cas.

Ensuite, on analyse la fonction sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, puisque la fonction est 2π-périodique. On a

$$f_n'(x) = \sin^{n-1} x((n+1)\cos^2 x - 1).$$

Les points critiques sont

$$\begin{aligned}
x_0 &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \\
x_1 &= 2\pi - x_1, \\
x_2 &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \\
x_3 &= 2\pi - x_2, \\
x_4 &= 0, \\
x_5 &= \pi, \\
x_6 &= 2\pi.
\end{aligned}$$

Puisque $f_n(x_4) = f_n(x_5) = f_n(x_6) = 0$, on peut ignorer ces points critiques. Pour les autres, on a

$$f_n(x_0) = f_n(x_2) = -f_n(x_1) = -f_n(x_3) = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ces points sont les maximums ou minimums, donc a on

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = |f_n(x_0)| \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

Exercice 3. Soit (f_n) et (g_n) deux suites qui convergent uniformément respectivement vers f et g sur un intervalle I. On suppose que f et g sont bornées. Montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

Solution. D'abord, on note que

$$f_n g_n - fg = f_n g_n - f_n g + f_n g - fg.$$

Par hypothèse, on a $\sup |f| \leq M_0$ et $\sup |g| \leq M_1$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}|f_n g_n - fg| &= |f_n g_n - f_n g + f_n g - fg| \\ &\leq |f_n||g_n - g| + |g||g - g_n|.\end{aligned}$$

Puisque $f_n \to f$ uniformément et que f est bornée, f_n est bornée par une constante R qui ne dépend pas n. En effet, on a

$$|f_n| \leq |f_n - f| + |f|.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé et un N assez grand, on a

$$|f_n| \leq \varepsilon + M_0$$

pour $n \geq N$. Si $|f_n| \leq R_n$, alors on prend $R = \max\{R_1, R_2, \ldots, R_N, \varepsilon + M_0\}$.

On conclut que

$$\begin{aligned}|f_n g_n - fg| &\leq |f_n||g_n - g| + |g||g - g_n| \\ &\leq R|g_n - g| + M_1|g - g_n|.\end{aligned}$$

Cette dernière ligne tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ indépendamment de x.

Exercice 4. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx), & \text{si } x \in [0, 1/n], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Trouver la limite simple de (f_n).

b) Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$ et $\int_0^1 f$.

c) Déduire que la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 5. Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\tan x)^n \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_2^A \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^n}$, avec $2 < A < \infty$

Solution. b) On voit que pour $y \in [2, A]$,

$$\left|\frac{1}{1 + y^n}\right| \leq \left|\frac{1}{1 + 2^n}\right| \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Ainsi, $\frac{1}{1+y^n} \to 0$ uniformément sur $[2, A]$.

Par le théorème sur la convergence uniforme et l'intégrale, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^A \frac{\mathrm{d}y}{1+y^n} = \int_2^A 0\mathrm{d}y = 0.$$

Optionnel. Ici, on peut même voir que l'intégrale impropre lorsque $A\to\infty$ est nulle. En effet, on a pour $y\in[2,\infty)$ et $n\geq 2$

$$\frac{1}{1+y^n}\leq\frac{1}{1+y^2 2^{n-2}}.$$

Ensuite, on voit que

$$\int_2^A \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2 2^{n-2}} = \left.\frac{\arctan(\sqrt{2^{n-2}}\,y)}{\sqrt{2^{n-2}}}\right|_2^A.$$

Si on laisse $A\to\infty$, on obtient

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y^n}\leq\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(\sqrt{2^{n-2}}\,2)}{\sqrt{2^{n-2}}}.$$

Enfin, si on laisse $n\to\infty$, on trouve que

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y^n} = 0.$$

Attention! On ne peut pas utiliser le théorème vu en classe pour échanger la limite lorsque $n\to\infty$ et l'intégrale impropre. En effet, le théorème ne fonctionne que pour une intégrale de Riemann normale (sur un intervalle compact). En fait, la difficulté ici est d'échanger deux limites : $\lim\limits_{A\to\infty}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}$, ce qui est toujours un processus délicat en analyse et même souvent faux.

Exercice 6. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ et avec f_n' continue. Montrer que si $f_n\to f$ simplement sur $\mathbb{R}$ et si pour tout compact $[a,b]\subset\mathbb{R}$, il existe $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ telle que $f_n'\to g$ uniformément sur $[a,b]$, alors f' existe et $f_n'(x)\to f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Solution. Si g_1 est la limite f_n' sur $[a,b]$ et g_2 est la limite de f_n' sur $[c,d]$, alors sur $[a,b]\cap[c,d]$, on doit avoir $g_1=g_2$, car la limite est unique.

Soit $x\in\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation et convergence uniforme montre que f est dérivable en x. De plus, le paragraphe précédent montre que $f'(x)$ est bien définie. Ainsi, pour tout x, $f'(x)$ existe.

Exercice 7. Montrer que

$$\int_0^\pi\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}\mathrm{d}x\right)=0.$$

Solution. Pour chaque n, on a

$$\left|\frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}\right| \leq \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

On pose donc $M_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$. Par le critère de Weierstrass, puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la série de départ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Puisque $\int_0^{\pi} \cos(2nx)\mathrm{d}x = 0$. On conclut que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}\mathrm{d}x\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.\end{aligned}$$

Exercice 8. On pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

pour $x \in (-1, 1)$.

a) Calculer

$$\lim_{x \to -1} f(x).$$

b) Est-ce que $f(-1)$ converge? Ceci est un exemple où l'on ne peut pas échanger la limite avec la série.

Exercice 9. Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}.$$

a) Montrer que la série de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'elle ne converge pas absolument.

Solution. a) On pose

$$f_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}.$$

On a

$$|f_m(x) - f(x)| = \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}\right| = \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m-1}}{n+x^2}\right|.$$

Ensuite, en regroupant les termes deux à deux, on voit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m+2k+1+x^2} - \frac{1}{m+2k+2+x^2} \\
&= \frac{1}{(m+2k+1+x^2)(m+2k+2+x^2)} \\
&\leq \frac{1}{(m+2k+1)(m+2k+2)} \\
&\leq \frac{1}{(m+2k)^2} \\
&\leq \frac{1}{(m+k)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+k)^2} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Comme cette dernière série est convergente, lorsque $m \to \infty$, elle tend vers 0. On a donc que $f_m \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) Pour chaque $x \geq 1$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < 2\lfloor x \rfloor$. Ainsi, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4\lfloor x \rfloor^2} = \sum_{n=4\lfloor x \rfloor^2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

et cette dernière diverge. Les autres valeurs de x se font de la même façon.

Exercice 10. Montrer que $f'(x)$ existe pour tout x, où f est la série de l'exercice précédent.

Exercice 11. Soit la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2}.$$

a) Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la série converge uniformément sur $[0, R]$ pour tout $R > 0$.

c) Montrer que $f'(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution. b) Sur $[0, R]$, on a

$$\frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{R}{n^2},$$

donc on pose $M_n = \frac{R}{n^2}$. Par le critère de Weierstrass, on a conclut que la série converge uniformément.

c) La dérivée du terme général est

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{n^2+x^2} &= \frac{(n^2+x^2)-x(2x)}{(n^2+x^2)^2}\\ &= \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\\ &\leq \frac{n^2-0}{(n^2+0^2)^2}\\ &= \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

On utilise le critière de Weierstrass avec $M_n = \frac{1}{n^2}$ pour conclure que la série $\sum \left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. De plus, on voit que les sommes partielles de cette série sont continues. On conclut que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.