Analyse 2

Série 1

Exercice 1. Montrer les propriétés suivantes de l'intégrale.

a) Si f est intégrable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

b) Si f est intégrable sur $[a, b]$ et si $c \in \mathbb{R}$, alors cf est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b cf = c\left(\int_a^b f\right).$$

c) Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Exercice 2. (Inégalité de Schwarz)

a) Soit le polynôme de degré deux $p(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Montrer que si $p(x) \geq 0$ pour tout x, alors son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif ou nul.

b) Soit $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Montrer que

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

Indice. Poser le polynôme $p(\lambda) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 3. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_a^b f^2 = 0$, alors $f \equiv 0$ (c'est-à-dire $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$). Montrer que si f est seulement intégrable, alors l'énoncé est faux.

Exercice 4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{n}$$

et

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n-1}.$$

b) On pose $f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Montrer que la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - f(n)$$

converge. Que pouvez-vous dire sur la valeur de la limite?

Exercice 5. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On admet que l'intégrale de f peut s'écrire comme une somme de Riemann :

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\big(\tfrac{j}{n}\big).$$

Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} e^{k/n}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

d) Trouver une fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ qui est n'est pas intégrable, mais dont la somme de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\big(\tfrac{j}{n}\big)$$

converge.

Exercice 6. Donner une exemple d'une fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ non intégrable, mais telle que $|f|$ est intégrable.

Exercice 7. Soit h une fonction continue et intégrable et soit f, g deux fonctions bornées et dérivables. Calculer la dérivée de

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 8. Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{cotan}(3t)}$ b) $\displaystyle\int \log x \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$ d) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2 t + 3\cos^2 t}$ f) $\displaystyle\int x \arctan x \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3}$

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+\sqrt{x})\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^{1/3}}\right)\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\log^3 t}$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$

e) $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{1+s^2}}$

Exercice 10. Soit $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction.

a) Montrer que si f est paire ($f(-x) = f(x)$), alors $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.

b) Montrer que si f est impaire ($f(-x) = -f(x)$), alors $\int_{-a}^a f = 0$.

c) Calculer les intégrales suivantes.

i) $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\mathrm{d}x$ *ii)* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos^n x \mathrm{d}x$ ($n \in \mathbb{N}^*$) *iii)* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x \mathrm{d}x$

Exercice 11. Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans trouver la valeur).

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \sin t \mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+\cos x + e^x}\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$, $a \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\sqrt{1+x}}{1-x}\mathrm{d}x$

Exercice 12. Déterminer la convergence des intégrales suivantes. Si elle converge, la calculer. Si elle diverge, calculer la valeur principale si possible.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\log|x|}{x}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \tan x \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

Exercice 13. (Fonction gamma)

a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge pour tout $x > 0$.

On pose $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

b) Montrer que $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ pour $x > 1$.

c) Montrer que $\Gamma(n) = n!$ lorsque n un nombre naturel.

d) Étendre le domaine de définition de Γ sur $\{x < 0\} \setminus \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

e) Montrer que

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

la fameuse *intégrale de Gauss*.

Exercices supplémentaires

Cette section des exercices est optionnelle.

Définition. 1. Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle. Une *partition* (ou subdivision) P de R en rectangles est un ensemble de la forme $P = A \times D$, où $A = \{x_0, \dots, x_n\}$ est une partition de $[a, b]$ et $D = \{y_0, \dots, y_m\}$ est une partition de $[c, d]$.

2. Soit $f\colon R \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit

$$\begin{aligned} I(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \inf_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x, y)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \\ S(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sup_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x, y)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

3. On définit l'intégrale intégrale inférieure et l'intégrale supérieure par

$$\underline{\iint_R} f = \sup_P I(f, P) \qquad \text{et} \qquad \overline{\iint_R} f = \inf_P I(f, P),$$

où le supremum et l'infimum sont pris sur toutes les partitions en rectangles de $[a, b] \times [c, d]$.

4. On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) si

$$\underline{\iint_R} f = \overline{\iint_R} f.$$

On note la quantité commune $\iint_R f$ (ou $\iint_R f(x, y)\mathrm{d}A$, où $\mathrm{d}A$ désigne un *élément d'aire*).

Exercice 14. (Théorème de Fubini, version pour intégrale de Riemann) Soit $R = [a, b]\times[c, d]$ et $f\colon R \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Le but de la question est de montrer que

$$\iint_R f(x, y)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{†}$$

a) Soit $A = [a, b]$ et $B = [c, d]$ et soit $g\colon A \times B \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que

$$\sup_{A\times B} g(x, y) = \sup_{x\in A} \sup_{y\in B} g(x, y) = \sup_{y\in B} \sup_{x\in A} g(x, y).$$

b) Montrer l'équation (†).

Exercice 15. (Dérivée d'une intégrale paramétrique) Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ et $f\colon R \to \mathbb{R}$ une fonction des variables $(x,y) \in R$. On suppose que

1. $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable pour tout $y \in [c,d]$;
2. $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable pour tout $x \in [a,b]$;
3. $\frac{\partial f}{\partial x}$ est intégrable sur $[a,b] \times [c,d]$;
4. $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue pour tout $y \in [c,d]$

Montrer que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}y.$$

(*Indice*. Considérer $\displaystyle\int_x^{x+h}\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$.)