Analyse 2

Série 1

Exercice 1. Montrer les propriétés suivantes de l'intégrale.

a) Si f est intégrable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

b) Si f est intégrable sur $[a, b]$ et si $c \in \mathbb{R}$, alors cf est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b cf = c\left(\int_a^b f\right).$$

c) Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Exercice 2. (Inégalité de Schwarz)

a) Soit le polynôme de degré deux $p(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Montrer que si $p(x) \geq 0$ pour tout x, alors son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif ou nul.

Solution. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $\Delta > 0$. On pose

$$x_0 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a donc

$$p(x_0) = 0$$
$$p'(x_0) = \sqrt{\Delta}.$$

Ainsi, x_0 n'est pas un minimum local, donc il existe forcément un y tel que $p(y) < p(x_0) = 0$, ce qui est une contradiction.

b) Soit $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Montrer que

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

Indice. Poser le polynôme $p(\lambda) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 \mathrm{d}t$.

Solution. On suppose que $\int_a^b g^2 \neq 0$. On considère

$$p(\lambda) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 \mathrm{d}t = \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b (fg) + \lambda^2 \int_a^b g^2.$$

Il est clair que $p(\lambda) \geq 0$ pour tout λ. Ainsi, par le a), on a

$$0 \geq \Delta = 4\Big(\int_a^b fg\Big)^2 - 4\int_a^b f^2 \int_a^b g^2.$$

Si $\int_a^b g^2 = 0$, alors on a $p(\lambda) = \lambda \int_a^b fg + \int_a^b f^2 \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui est seulement possible si $\int_a^b fg = 0$.

Exercice 3. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_a^b f^2 = 0$, alors $f \equiv 0$ (c'est-à-dire $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$). Montrer que si f est seulement intégrable, alors l'énoncé est faux.

Solution. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe x_0 tel que, sans perte de généralité, $f(x_0) > 0$. Puisque f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ (exercice d'analyse 1). On a ainsi

$$\int_a^b f^2 \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2 > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} 0 = 0,$$

ce qui est une contracdiction.

Si f n'est pas continue, il suffit de prendre la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0; \\ 1, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

sur l'intervalle $[-1,1]$.

Exercice 4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{n}$$

et

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n-1}.$$

Solution. a) On pose $g(x) = \frac{1}{x}$. On prend la partition $P = \{n, n+1\}$ de l'intervalle $[n, n+1]$. On a alors

$$I(g,P) \leq \int_n^{n+1} g \leq S(g,P).$$

D'une part, on a

$$I(g,P) = \inf_{[n,n+1]} g = \frac{1}{n+1}.$$

D'autre part, on a

$$S(g,P) = \sup_{[n,n+1]} g = \frac{1}{n}.$$

L'inégalité s'ensuit.

La deuxième inégalité découle de la première en écrivant

$$\int_1^n g = \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} g.$$

b) On pose $f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Montrer que la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - f(n)$$

converge. Que pouvez-vous dire sur la valeur de la limite?

Solution. Par le a), on sait que $\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$, donc la suite est bornée. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
u_n - u_{n+1} &= f(n+1) - f(n) - \frac{1}{n+1} \\
&= f'(\xi)(n+1-n) - \frac{1}{n+1} && \text{par le thm. des acc. finis} \\
&= \frac{1}{\xi} - \frac{1}{n+1} && \text{par le TFC1} \\
&\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} && \text{car } \xi \in (n, n+1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La suite est donc décroissante. Une suite minorée et décroissante converge, donc (u_n) converge. De plus, puisque $\frac{1}{n} \leq u_n$, on sait que la limite est positive.

Il est possible d'approximer la limite davantage, bien que ce ne soit pas la méthode la plus efficace. Soit γ la limite de la suite. Comme la suite est décroissante, on sait que $0 \leq \gamma \leq u_n$ pour tout n. On peut approcher la valeur de u_2 comme suit. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $P = \{1, 1+\frac{1}{m}, \ldots, 1+\frac{m-1}{m}, 2\}$ une subdivision de $[1, 2]$. On a

$$\begin{aligned}
f(2) &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&\geq I(f, P) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \inf_{[1+\frac{j-1}{m}, 1+\frac{j}{m}]} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{j}{m} - 1 - \frac{j-1}{m}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{1+\frac{j}{m}} \frac{1}{m} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{m}{m+j} \frac{1}{m} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m+j}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$u_2 = 1 + \frac{1}{2} - f(2) \le \frac{3}{2} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m+j}.$$

Pour $m = 2$, on trouve $u_2 \le \frac{11}{12}$ et pour $m = 3$, $u_2 \le \frac{53}{60}$. Bref, on conclut que

$$0 \le \gamma \le u_2 \le \frac{53}{60}.$$

On peut ainsi obtenir des approximations de plus en plus fines des u_n. Cependant, d'autres méthodes plus performantes sont utilisées pour s'approcher de γ, puisque la suite (u_n) converge vers γ plutôt lentement.

Exercice 5. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On admet que l'intégrale de f peut s'écrire comme une somme de Riemann :

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\big(\tfrac{j}{n}\big).$$

Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}$ b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} e^{k/n}$ c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

d) Trouver une fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ qui est n'est pas intégrable, mais dont la somme de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\big(\tfrac{j}{n}\big)$$

converge.

Solution. d) Il suffit de prendre

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Exercice 6. Donner une exemple d'une fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ non intégrable, mais telle que $|f|$ est intégrable.

Solution. Il suffit de prendre

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

On voit que $|f(x)| = 1$ pour tout x.

Exercice 7. Soit h une fonction continue et intégrable et soit f, g deux fonctions bornées et dérivables. Calculer la dérivée de

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\mathrm{d}t.$$

Solution. On pose $G(x) = \int_a^x h$. Par le TFC1, G est dérivable. De plus, comme f et g sont dérivables, il suit que $G \circ f$ et $G \circ g$ sont dérivables. On a alors que

$$F(x) = G(f(x)) - G(g(x))$$

est dérivable, donc par la dérivation en chaîne, on a

$$F'(x) = G'(f(x))f'(x) - G'(g(x))g'(x) = h(f(x))f'(x) - h(g(x))g'(x).$$

Exercice 8. Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{cotan}(3t)}$

b) $\displaystyle\int \log x \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

d) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2 t + 3\cos^2 t}$

f) $\displaystyle\int x \arctan x \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3}$

Solution. c) On complète le carré. On a

$$\begin{aligned} 2-3x-4x^2 &= -4(x^2 + \tfrac{3}{4}x) + 2 \\ &= -4(x^2 + \tfrac{3}{4}x + \tfrac{9}{64}) + 2 + \frac{9}{16} \\ &= -4(x + \tfrac{3}{8})^2 + \frac{41}{16} \\ &= 4\Big(\frac{41}{64} - (x + \tfrac{3}{8})^2\Big). \end{aligned}$$

On vise à obtenir un arcsin. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x-4x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{\frac{41}{61} - (x+\frac{3}{8})^2}} \qquad\qquad u = x + \tfrac{3}{8}, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\frac{\sqrt{41}}{8}\sqrt{1 - \frac{64}{41}u^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{2\sqrt{41}} \int \frac{8}{\sqrt{41}} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}} \qquad v = \frac{8}{\sqrt{41}}u \quad \frac{\sqrt{41}}{8}\mathrm{d}v = \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin v + C$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{8x+24}{\sqrt{41}}\right) + C.$$

d) La division de polynômes nous donne

$$\frac{x^5}{x^3-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^3-1}.$$

Ensuite, on utilise les fractions partielles :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^3-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\ &= \frac{A(x^2+x+1) + Bx(x-1)C(x-1)}{x^3-1} \\ &= \frac{x^2(A+B) + x(A-B+C) + (A-C)}{x^3-1}. \end{aligned}$$

On trouve les équations

$$A+B=1, \qquad A-B+C=0, \qquad A-C=0,$$

avec la solution

$$A = \tfrac{1}{3}, \qquad B = \tfrac{2}{3}, \qquad C = \tfrac{1}{3}.$$

On trouve donc pour l'intégrale

$$\int \left(x^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\log|x-1| + \frac{1}{3}\log|x^2+x+1| + C.$$

e) On transforme l'intégrande en tangente et en sécante. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2 t + 3\cos^2 t} &= \int \frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{2\tan^2 t + 3} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2+3} \qquad u = \tan x \quad \mathrm{d}u = \sec^2 x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{\frac{2}{3}u^2+1}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+1} && v = \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u \\
& && \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathrm{d}v = \mathrm{d}u \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \arctan v + C \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \arctan\left(\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \tan x\right).
\end{aligned}
$$

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+\sqrt{x})\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^{1/3}}\right)\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\log^3 t}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$

e) $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{1+s^2}}$

Solution. d) Par essai-erreur, on trouve que -1 est un zéro de $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$. On divise ce polynôme par $x+1$ pour obtenir

$$x^4+2x^3+2x^2+2x+1 = (x+1)(x^3+x^2+x+1).$$

On voit maintenant que -1 est encore une racine, donc on trouve

$$x^4+2x^3+2x^2+2x+1 = (x+1)^2(x^2+1).$$

On utilise maintenant les fractions partielles. On trouve

$$\frac{x}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C+Dx}{x^2+1}.$$

Ceci mène à

$$
\begin{aligned}
x &= A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + C(x+1)^2 + Dx(x+1)^2 \\
&= x^3(A+D) + x^2(A+B+C+2D) + x(A+2C+D) + (A+B+C).
\end{aligned}
$$

On trouve que solution $A = D = 0$, $C = \frac{1}{2}$ et $B = -\frac{1}{2}$.

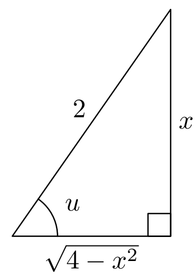
Maintenant, on intègre facilement par

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1} + \arctan x\right]_0^1
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - 1\right)$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

e) L'expression $\sqrt{4-x^2}$ suggère le triangle et les égalités suivants

$$\cos u = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$
$$\sin u = \frac{x}{2}$$
$$\cos u\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{2}.$$



L'intégrale indéfinie devient

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = \int (4\sin^2 u)\,(2\cos u)\,(2\cos u\mathrm{d}u)$$
$$= 16\int \sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u.$$

On pose $I = \int \sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u$. Par intégration par partie, on trouve

$$I = \frac{\cos u\sin^3 u}{3} + \frac{1}{3}\int \sin^4 u\,\mathrm{d}u \qquad \begin{array}{ll} w = \cos u & \mathrm{d}v = \sin^2 u\cos u\,\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}w = -\sin u\,\mathrm{d}u & v = \frac{\sin^3 u}{3} \end{array}$$
$$= \frac{\cos u\sin^3 u}{3} + \frac{1}{3}\int (1-\cos^2 u)\sin^2 u\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\cos u\sin^3 u}{3} - \frac{\sin u\cos u}{6} + \frac{u}{6} - \frac{I}{3} + C.$$

Il est suffisant de considérer la primitive avec $C = 0$. On a donc

$$I = \frac{\cos u\sin^3 u}{4} - \frac{\sin u\cos u}{8} + \frac{u}{8}$$
$$= \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{64} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{32} + \frac{1}{8}\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)$$

Enfin, pour évaluer l'intégrale définie, on a

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = 16I = \left[\frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right]_0^2 = 2\arcsin(1) = \pi.$$

f) On peut résoudre l'intégrale par deux substitutions :

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{s^2+1}} = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}} \qquad\qquad u = \tfrac{1}{u} \quad \mathrm{d}u = -\tfrac{1}{u^2}\mathrm{d}u$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$= \int_{\frac{5}{4}}^2 \frac{\mathrm{d}v}{2\sqrt{v}} \qquad\qquad v = 1+u^2 \quad \mathrm{d}v = 2u\mathrm{d}u$$

$$= \sqrt{v}\Big|_{\frac{5}{4}}^2$$

$$= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 10. Soit $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction.

a) Montrer que si f est paire ($f(-x) = f(x)$), alors $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.

b) Montrer que si f est impaire ($f(-x) = -f(x)$), alors $\int_{-a}^a f = 0$.

c) Calculer les intégrales suivantes.

$i)$ $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\mathrm{d}x$ $\qquad ii)$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos^n x\mathrm{d}x$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ $\qquad iii)$ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3\cos x\mathrm{d}x$

Solution. $i)$ L'intégrande est impair, donc on a

$$\int_{-1}^2 x|x|\mathrm{d}x = \left(\int_{-1}^1 + \int_1^2\right) x|x|\mathrm{d}x = 0 + \int_1^2 x|x|\mathrm{d}x.$$

Sur l'intervalle $[1,2]$, la valeur absolue n'est plus utile, on a donc

$$\int_1^2 x|x|\mathrm{d}x = \int_1^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{7}{3}.$$

$ii)$ L'intégrande est impair. On utilise les identités trigonométriques des fonctions sinus et cosinus pour montrer que l'intégrale est nulle. Avec $u = x - \pi$, on a

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x\cos^n x\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(u+\pi)\cos^n(u+\pi)\mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 u\cos^n u\mathrm{d}u = 0.$$

$iii)$ L'intégrande est impair, donc l'intégrale est nulle

Exercice 11. Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans trouver la valeur).

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \sin t\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+\cos x+e^x}\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$, $a\neq 0$ et $m\in\mathbb{N}^*$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\sqrt{1+x}}{1-x}\mathrm{d}x$

Solution. a) On peut étudier la convergence de $\int_1^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$, puisque celle-ci converge si et seulement si l'intégrale de départ converge. Ainsi, puisque $x\geq 1$, on a

$$\begin{aligned} x^2\geq x &\Rightarrow -x^2\leq -x \\ &\Rightarrow e^{-x^2}\leq e^{-x} \qquad \text{(car exp est croissante).}\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-x}\mathrm{d}x \lim_{M\to\infty} e^{-M}-e^{-1}=e^{-1}.$$

On a donc $\int_1^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x\leq\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x<\infty$.

b) L'intégrale diverge, car on a

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M \sin t\mathrm{d}t=\lim_{M\to\infty}(-\cos(M)+\cos(0))$$

et cette limite diverge. (Exercice d'analyse 1.)

c) L'intégrale converge, puisque

$$\frac{\sin x}{1+\cos x+e^x}\leq\frac{1}{e^x}=e^{-x}$$

et que $\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$ converge.

d) Le dénumérateur est non nul pour tout x, donc le seul problème se trouve à l'infini. On étudie l'intégrale sur l'intervalle $[1,\infty)$, puisque l'intégrande est intégrable sur $[0,1]$. Pour $x\geq 1$, on a

$$\frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}\leq\frac{1}{x^2}.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{M\to\infty}\left(\frac{-1}{M}+1\right)=1.$$

On conclut que l'intégrale du départ converge.

e) Il y a deux problèmes, lorsque $x\to 0$ et lorsque $x\to\infty$. Ainsi, on sépare l'intégrale sur $[0,1]$ et sur $[1,\infty)$ et on analyse chacun séparemment.

Sur $[1,\infty)$, on a $x^2\leq e^x$ (montrez-le!), donc $x\leq e^{x/2}$. Ainsi, on obtient

$$\frac{x}{e^x-1}\leq\frac{e^{x/2}}{e^x-\frac{1}{2}e^x}=2e^{-x}.$$

On sait que $\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$ converge, donc l'intégrale de départ converge sur $[1,\infty)$.

Sur $[0,1)$, l'intégrale converge, car la limite suivante existe :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{e^x-1} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(1+x+o(x))-1} && \text{(dév. limités de } e^x\text{)}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+o(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+o(1)} = 1.\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ se prolonge comme une fonction continue sur $[0,1]$, ce qui veut dire qu'elle est intégrable.

f) Le problème survient lorsque $x\to 1$, donc on considère l'intégrale sur $[\frac{1}{2},1]$. Pour $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$, on a

$$\frac{x\sqrt{x+1}}{1-x}\geq\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+1}}{1-x}.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{y\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^{y}\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\lim_{y\to 1^-}-\log(1-y)+\log(\tfrac{1}{2})=\infty.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x\sqrt{x+1}}{1-x}\mathrm{d}x\geq\sqrt{\frac{3}{8}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\infty.$$

On conclut que l'intégrale impropre diverge.

Exercice 12. Déterminer la convergence des intégrales suivantes. Si elle converge, la calculer. Si elle diverge, calculer la valeur principale si possible.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\log|x|}{x}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\pi\tan x\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

Solution. a) L'intégrale impropre diverge. La valeur principale vaut 0, puisque l'intégrande est impair et qu'on intègre sur $[-1,1]$.

c) On a

$$\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-1}\Big|_{1+\varepsilon}^{2}=\sqrt{3}-\sqrt{\varepsilon}.$$

L'intégrale impropre converge et elle vaut $\sqrt{3}$.

Exercice 13. (Fonction gamma)

a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge pour tout $x>0$.

On pose $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ pour $x>0$.

b) Montrer que $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$ pour $x>1$.

c) Montrer que $\Gamma(n+1) = n!$ lorsque n un nombre naturel.

d) Étendre le domaine de définition de Γ sur $\{x < 0\} \setminus \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

e) Montrer que

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x,$$

la fameuse *intégrale de Gauss*.

Exercices supplémentaires

Cette section des exercices est optionnelle.

Définition. 1. Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle. Une *partition* (ou subdivision) P de R en rectangles est un ensemble de la forme $P = A \times D$, où $A = \{x_0, \dots, x_n\}$ est une partition de $[a, b]$ et $D = \{y_0, \dots, y_m\}$ est une partition de $[c, d]$.

2. Soit $f \colon R \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \inf_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x, y)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$
$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sup_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x, y)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

3. On définit l'intégrale intégrale inférieure et l'intégrale supérieure par

$$\underline{\iint_R} f = \sup_P I(f, P) \qquad \text{et} \qquad \overline{\iint_R} f = \inf_P I(f, P),$$

où le supremum et l'infimum sont pris sur toutes les partitions en rectangles de $[a, b] \times [c, d]$.

4. On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) si

$$\underline{\iint_R} f = \overline{\iint_R} f.$$

On note la quantité commune $\iint_R f$ (ou $\iint_R f(x, y)\mathrm{d}A$, où $\mathrm{d}A$ désigne un *élément d'aire*).

Exercice 14. (Théorème de Fubini, version pour intégrale de Riemann) Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ et $f \colon R \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Le but de la question est de montrer que

$$\iint_R f(x, y)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{$\dagger$}$$

a) Soit $A = [a, b]$ et $B = [c, d]$ et soit $g \colon A \times B \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que

$$\sup_{A \times B} g(x, y) = \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} g(x, y) = \sup_{y \in B} \sup_{x \in A} g(x, y).$$

b) Montrer l'équation ($\dagger$).

Solution. a) D'une part, on a

$$g(x, y) \leq \sup_{A \times B} g$$

pour tout $(x, y) \in A \times B$. Ainsi, on prend $\sup_A$ et $\sup_B$ des deux côtés pour obtenir

$$\sup_{x \in A} \sup_{y \in B} g(x, y) \leq \sup_{A \times B} g.$$

D'autre part, on voit que

$$g(x, y) \leq \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} g(x, y) \tag{$*$}$$

pour tout $x \in A$ et $y \in B$. En effet, par définition, pour chaque $x \in A$ on a

$$\sup_{y \in B} g(x, y) = \sup\{g(x, y) \mid y \in B\},$$

donc comme $g(x, y) \in \{g(x, y) \mid y \in B\}$, il s'ensuit que

$$g(x, y) \leq \sup_{y \in B} g(x, y)$$

pour tout $x \in A$. Ensuite, de façon analogue, on a que

$$\sup_{y \in B} g(x, y) \leq \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} g(x, y),$$

ce qui nous donne $(*)$. Ainsi, le côté droit de l'inégalité est un majorant de $g(A \times B)$, donc

$$\sup_{A \times B} g \leq \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} g(x, y).$$

b) Soit $P \times Q = \{x_0, \cdots, x_m\} \times \{y_0, \ldots, y_n\}$ une partition de R. Pour chaque $y \in [c, d]$, on note par

$$S(f(\cdot, y), P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x, y)(x_i - x_{i-1})$$

la somme supérieure de f par rapport à la variable x et la partition P de $[a, b]$. Dans cette équation, y est fixe. De façon analogue, on aura la somme supérieure $S(f(x, \cdot), Q)$ par rapport à y, avec x fixé.

On a

$$\begin{aligned}
\overline{\iint_R} f &= \inf_{P \times Q} S(f, P \times Q) \\
&= \inf_{P \times Q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) \\
&= \inf_P \sum_{i=1}^{n} \inf_Q S\left(\sup_{x \in [x_i, x_{i-1}]} f(x, \cdot), Q\right)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \inf_P \sum_{i=1}^{n} \overline{\int_c^d} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x, y)\, \mathrm{d}y\, (x_i - x_{i-1}) \\
&= \overline{\int_c^d} \inf_P S(f(\cdot, y), P)\, \mathrm{d}y \\
&= \overline{\int_c^d} \overline{\int_a^b} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

On obtient la même formule pour l'intégrale inférieure. Ainsi, puisque f est intégrale, on conclut que toutes les intégrales convergent et que la formule (†) est vérifiée.

Exercice 15. (Dérivée d'une intégrale paramétrique) Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ et $f : R \to \mathbb{R}$ une fonction des variables $(x, y) \in R$. On suppose que

1. $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable pour tout $y \in [c, d]$;
2. $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable pour tout $x \in [a, b]$;
3. $\frac{\partial f}{\partial x}$ est intégrable sur $[a, b] \times [c, d]$;
4. $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est continue pour tout $y \in [c, d]$

Montrer que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathrm{d}y.$$

(*Indice*. Considérer $\displaystyle\int_x^{x+h} \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(t, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$.)

Solution. On pose
$$F(x) = \int_a^x \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(t, y)\mathrm{d}y \, \mathrm{d}t.$$

D'une part, on voit que
$$F(x + h) - F(x) = \int_x^{x+h} \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(t, y)\mathrm{d}y \, \mathrm{d}t. \tag{$*$}$$

D'autre part, par le théorème de Fubini, on a
$$\begin{aligned}
\int_x^{x+h} \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(t, y)\mathrm{d}y \, \mathrm{d}t &= \int_c^d \int_x^{x+h} \frac{\partial f}{\partial x}(t, y)\mathrm{d}t \, \mathrm{d}y \\
&= \int_c^d \Big(f(x + h, y) - f(x, y) \Big)\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d f(x + h, y) \, \mathrm{d}y - \int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{$**$}$$

En divisant $(*)$ par h et en laissant $h \to 0$, on obtient
$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, \mathrm{d}y,$$

par le théorème fondamentale du calcul 1. On divise $(**)$ par h. On sait que la limite lorsque $h \to 0$ existe, puisque $F'(x)$ existe. Ainsi, on trouve
$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}y.$$