Analyse 2
Série 0

Exercice 1. a) Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit c un point intérieur de I et soit $h > 0$ tel que $c + h \in I$. Montrer que si f est continue en c, alors

$$\lim_{h\to 0^+} \sup_{[c,c+h]} f(x) = f(c).$$

Montrer que le cas où $h < 0$ est également vrai. Déduire ensuite le cas de l'infimum.

b) Trouver une fonction $g\colon I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{h\to 0^+} \sup_{[c,c+h]} g(x) \neq g(c).$$

Exercice 2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y, z \in [a,b]$ avec $0 < z - y \leq \delta$, on ait

$$\sup_{x\in[y,z]} f(x) \leq \inf_{x\in[y,z]} f(x) + \varepsilon.$$

Exercice 3. a) Développements limités. Montrer que si f est n-fois dérivable en x_0, alors

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

(Vous pouvez utiliser le théorème des développements limités tel que vu en analyse 1 (ou consultez le rappel). La différence, ici, est l'utilisation du petit o.)

b) Montrer les égalités suivantes*.

i) $\sin(x) = x + o(x^2)$ *ii*) $\log(1+x) = x + o(x)$ *iii*) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$

Exercice 4. Soit $f, g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ deux fonctions. Montrer que si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

Exercice 5. Soit $a > 0$ et $f, g\colon (-a,a) \to (0,\infty)$. Montrer que si la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

* On prend pour acquis que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{1}{x}$ et que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$ pour le moment. Cela sera démontré au chapitre 4, où ces fonctions seront également définies.