Résumé

Théorèmes de convergence

$f_n \to f$ unif sur $[a,b]$ f_n continue	$\lim\limits_{y \to x} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(y)$ $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f_n$
$f_n \to f$ simplement $f_n' \to g$ unif	$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{d}{dx} f_n$ $\downarrow \; f' = g.$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ unif. u_n continue	$\lim\limits_{y \to x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(y)$ $\int_a^b \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ simp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ unif	$\frac{d}{dx} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

Fonctions transcendantes

	Def	Prop	Ég. diff
$\exp : R \to (0,\infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$e^x = \exp x$ $e^{a+b} = e^a e^b$ exp bijective exp analytique	$y' = y$
$\log : (0,\infty) \to R$	$\int_1^x \frac{dt}{t}$	$\log(ab) = \log a + \log b$ log bijective $\log(e^x) = x$ log analytique	
$\sin : R \to [0,1]$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$	$\sin' = \cos$ analytique	$y'' = y$
$\cos : R \to [0,1]$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$\cos' = -\sin$ analytique $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 2π-périodique $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	
$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$	$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	analytique sur $(-1,1)$ $\cos(\arccos x) = x$	
$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{4}$ $\sin(\arcsin x) = x$	

Séries de Fourier

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

Sommes partielles : $S_k = \sum_{n=-k}^{k} c_n(f)\, e^{inx}$

Théorèmes de convergence

f régulière par morceaux	$S_k \xrightarrow{\text{simplement}} \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\ \frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} \end{cases}$ ou $S_k \to f(x)$ si f est continue
$\begin{cases} f \text{ continue} \\ + \text{ régulière par morceaux} \\ + \text{ periodique } f(-\pi) = f(\pi) \end{cases}$	$S_k \to f$ unif.
+ f' régulière par morceau + f' continue	$S_k \to f$ unif $S_k' \to f'$ unif

Relations

$$\boxed{c_n(f) = a_n(f) - i b_n(f)}$$

$$c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$$

$$\sum_{n=-k}^{k} c_n(f) e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n(f) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{k} b_n(f) \sin(nx)$$

Autres résultats

f intégrable	**Inégalité de Bessel** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n(f)\rvert^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2$
f continue + régulière par morceaux + périodique	**Égalité de Parseval** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n(f)\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2$
f k-fois continûment déri. + f périodique	$\lvert C_n(f)\rvert \leq \frac{M}{1+n^k}$ (Exercice)