Rappels et autres bizarreries

Une idée inspirée du TEXbook, les paragraphes comme celui-ci, précédés d'un sinus du topologue, contiennent des remarques ou des explications qui peuvent être ignorées lors d'une première lecture. Ils sont composés en taille 10pt, donc on peut facilement savoir où se termine le passage. Ces sections seront étiquetés ainsi pour l'une des raisons suivantes : des outils qui ne sont pas supposés maîtrisés pour le cours sont utilisés, le raisonnement devient un peu plus difficile à suivre (c'est ce qui a inspiré le symbole), le contenu s'éloigne un peu trop de la discussion ou du cadre du cours, un exercice qui est plus difficile.

Retour sur la continuité et la continuité uniforme

La continuité et la continuité uniforme sont deux notions proches, mais distinctes. On les rappelle ici. La continuité est utile partout en analyse et la continuité uniforme sera utilisé au chapitre 1.

Pour toute la section, on considère $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle (borné ou non) et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1. (Continuité) On dit que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *continue en* $x_0 \in I$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, on a

$$|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

On dit que f est *continue* si f est continue pour tout $x \in I$.

****

Définition 2. (Continuité uniforme) On dit $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in I$, on a

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

****

La différence entre les définitions est que pour la continuité uniforme, δ doit être adéquat pour tout $x, y \in I$, alors que pour la continuité en un point, δ peut varier en tout point. La continuité uniforme entraine la continuité, mais l'inverse est fausse en général. Voici un contre exemple.

Exemple 3. Soit $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Elle est bien sûre continue. Pour voir qu'elle n'est pas uniformément continue, on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ensuite, on considère $0 < \delta < \frac{1}{2}$ quelconque (si $\delta \geq \frac{1}{2}$, il suffit de prendre $x = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{2}$ pour obtenir une contradition). On restreint x à l'intervalle $(0, \frac{3}{4})$ et on pose $y = x + \frac{\delta}{2}$. Ensuite, on a

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\frac{x-y}{xy}\right| \\
&= \frac{\delta}{2}\frac{1}{|x(x+\frac{\delta}{2})|} \\
&\geq \frac{\delta}{2}\frac{1}{|x|}\frac{1}{(1+\frac{\delta}{2})}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, en prenant $x < \frac{\delta}{1+\frac{\delta}{2}} < \frac{1}{2}$ on obtient

$$|f(x) - f(y)| > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

On conclut que f n'est pas uniformément continue.

Le problème de ce contre-exemple est que quand x tend vers 0^+, f tend vers l'infinie. En fait, on a une réciproque partielle.

Théorème 4. *Soit $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si les limites*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to b^-} f(x)$$

existent, alors f est uniformément continue.

En particulier, si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle compact $[a,b]$, alors f est uniformément continue.

La continuité uniforme sera fort utile pour déterminer l'intégrabilité d'une fonction.

Enfin, on rappelle les résultats suivants concernant les fonctions continues.

Théorème des valeurs intermédiaires 5. (TVI) *Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ et pour tout c tel que $f(x) < c < f(y)$ ou $f(y) < c < f(x)$, il existe z tel que $x < z < y$ et $f(z) = c$.*

Théorème 6. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si I est un intervalle compact, alors f atteint son maximum et son minimum. En particulier, f est bornée.*

Retour sur la dérivée d'une fonction

On rappelle que f est *dérivable* en $x \in I$ si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe. Dans ce cas, on la note $f'(x)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$. On dit que f est dérivable si f est dérivable pour tout $x \in I$.

On étend la notion de dérivée aux intervalles fermés. Si f est définie sur un intervalle de la forme $[a,b)$ ou $[a,b]$, on définit la dérivée à gauche par

$$f'(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

lorsque la limite existe. La limite à droite, sur un intervalle de la forme $(a, b]$ ou $[a, b]$ se définit de façon analogue.

Si on dit que f est dérivable, cela veut dire que f est dérivable en tout $x \in I$, y compris à droite ou à gauche si l'intervalle inclut l'une de ses extrémités.

Un résultat important des fonctions dérivables est le suivant.

Théorème des accroissements finis 7. *(TAF) Si $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors pour tout $x, y \in (a, b)$ tels que $x < y$, il existe $\xi \in (x, y)$ tel que*

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$

Corollaire 8. *Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continument dérivable, alors pour tout $x < y$ dans I, il existe $M \geq 0$ tel que*

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|.$$

Théorème des développements limités 9. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$, soit $n \geq 1$ et on suppose que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors*

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \varepsilon(h) h^n,$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Classes de fonctions dérivables

On introduit les espaces de fonctions suivants.

Définition 10. Soit I un intervalle ouvert (borné ou non).

1. On définit l'ensemble $C^0(I)$ par
$$C^0(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\}.$$
2. On définit l'ensemble $C^1(I)$ par
$$C^1(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable et } f' \in C^0(I)\}.$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit
$$C^n(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable et } f' \in C^{n-1}(I)\}.$$
4. On définit l'ensemble $C^\infty(I)$ par
$$C^\infty(I) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I).$$

Lorsque $f \in C^n(I)$, on dit que f est *de classe C^n*.

****

Autrement dit, $C^n(I)$ est l'espace des fonctions n-fois dérivables dont la dérivée n-ième est continue. L'ensemble $C^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivable. Si I est un intervalle, c'est un ensemble non vide, puisque les fonctions constantes en font partie.

Il en va de soi que l'on a les inclusions suivantes

$$C^\infty(I) \subset \cdots \subset C^n(I) \subset \cdots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I).$$

De plus, les inclusions sont strictes, puisque la fonction $f(x) = (\max\{0, x\})^n$ est $n-1$-fois dérivable, mais pas n-fois.

Les ensembles $C^n(I)$ forment un espace vectoriel pour chaque $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. En effet, si $f, g, h \in C^n(I)$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

(1) $\alpha f \in C^n(I)$;
(2) $\alpha f + \beta g \in C^n(I)$;
(3) $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

Quelle est alors la dimension de l'espace? En fait, il s'agit d'un espace de dimension *infinie*. L'espace est donc plus difficile à cerner, puisqu'on ne peut pas facilement utiliser une base et des matrices pour travailler. Par exemple, pour $x \in I$, on peut définir une application linéaire $L_x : C^n(I) \to \mathbb{R}$ par

$$L_x(f) = f(x),$$

mais cette application ne se représente pas par une matrice.

On peut étendre la définition de C^n aux intervalles qui ne sont pas ouverts. Si I est un intervalle de la forme $(a, b]$, alors on définit

$$C^n(I) := \left\{ f \in C^n(a,b) \,\middle|\, \lim_{x \to b^-} f^{(j)}(x) \text{ existe pour tout } j \in \{0, 1, \ldots, n\} \right\}.$$

On définit $C^n(I)$ de façon similaire pour les cas $I = [a, b)$ et $I = [a, b]$.

Petit o et grand O

On utilisera la notation du petit o de Landau.

Définition 11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit r et h deux fonctions définies sur un voisinage de a. On dit que r est *un petit* $o(h(x))$ *lorsque* $x \to a$ (dit « petit o de h ») si

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{h(x)} = 0.$$

Par abus de notation, on écrit parfois $r(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$. Lorsque le contexte est clair, on écrira simplement $r(x) = o(h(x))$.

****

Exemple 12.

- $f(x) = x$ est un petit $o(1)$ lorsque $x \to 0$ (dit « petit o de 1 »), puisque $\lim_{x\to 0} x/1 = 0$. Cependant, f n'est pas un $o(x)$, car $\lim_{x \to 0} x/x = 1 \neq 0$.
- $g(x) = \sqrt{x}$ est un $o(x^{1/3})$ lorsque $x \to 0$. En fait, g est un $o(x^\varepsilon)$ pour tout $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$.
- $h(x) = 1 - \cos x$ est un $o(x)$ lorsque $x \to 0$, car, par la règle de l'Hôpital, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1} = 0.$$

La proposition suivante illustre un peu mieux comment cette notation sera utile.

Proposition 13. *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h), \tag{$*$}$$

pour tout $|h|$ assez petit. Dans ce cas, on a $f'(x_0) = A$.

*Démonstration***.** On suppose que f est dérivable. Dans ce cas, on pose

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h,$$

où h est assez petit pour que f soit définie en $x_0 + h$. On voit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

et donc r est un $o(h)$. Ainsi, l'équation $(*)$ est vérifiée avec $A = f'(x_0)$.

Maintenant, on suppose qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $(*)$ est vraie. On a alors

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \frac{o(h)}{h}.$$

Lorsque $h \to 0$, le côté droit converge vers A, donc le côté gauche converge également. Ainsi, on a bien que $f'(x_0)$ existe et $f'(x_0) = A$.

□

En fait, la proposition se généralise partiellement pour les dérivées d'ordre supérieur.

Exercice 1 Développements limités. Montrer que si f est n-fois dérivable en x_0, alors

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

La notation du petit o aide énormément pour faire les calculs dans certaines situations.

Exemple 14. *Calculer* $\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)^n}{x^{2n}}$. Le développement limité de $\cos x$ en 0 est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{(\cos x - 1)^n}{x^{2n}} &= \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1)^n}{x^{2n}} \\
&= \frac{(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^n}{x^{2n}} \\
&= \frac{(-1)^n \frac{1}{2^n} x^{2n} + o(x^{2n})}{x^{2n}} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n} + o(1).
\end{aligned}$$

On voit que la limite lorsque $x \to 0$ vaut $\frac{(-1)^n}{2^n}$.

La prochaine notation est celle du grand O. Elle est particulièrement utile en informatique, pour l'analyse d'algorithme.

Définition 15. 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f, g\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On dit que f est *un grand* $O(g(x))$ *lorsque* $x \to \infty$ s'il existe $M \geq a$ et $C > 0$ tels que pour tout $x \geq M$, on a

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0. On dit que f est un *grand* $O(g(x))$ *lorsque* $x \to x_0$ s'il existe $C, m > 0$ tel que si $|x - x_0| < m$, alors on a

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

****

Lorsque le contexte est clair, on ne précisera pas vers quelle valeur x tend. On commence par le cas où $x \to \infty$.

Exemple 16.

- $f(x) = x$ est un $O(x)$, puisque $x \leq x$ pour tout x. En fait, f est un $O(x^n)$ pour tout $n \geq 1$.
- Une fonction bornée g est un $O(1)$, car $g(x) \leq C$ pour tout x. Par exemple, $g(x) = \sin(x)$ est un $O(1)$.
- $h(x) = e^x$ n'est pas un $O(x^n)$ pour aucun $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 Soit $f, g\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ deux fonctions. Montrer que si

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

Ensuite, on s'attarde au grand O lorsque $x \to a$. Voici des exemples.

Exemple 17.

- $f(x) = x$ est un $O(x)$ lorsque $x \to 0$.
- $g(x) = \sin x$ est un $O(x)$ lorsque $x \to 0$.
- $h(x) = e^x$ est un $O(1)$ lorsque $x \to a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit $a > 0$ et $f, g\colon (-a, a) \to (0, \infty)$. Montrer que si la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

On a vu que le petit o est intimement lié aux développements limités. Le grand O est quant à lui lié au développement de Taylor.

Théorème 18. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur I. Alors pour $|h|$ assez petit, on a*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + O(h^{n+1}).$$

Démonstration. Par le théorème de Taylor, pour h si petit que f est définie sur $[x-h, x+h]$, il existe ξ tel que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ainsi, on voit que

$$\left|f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \cdots - f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}\right| = |f^{(n+1)}(\xi)|\frac{|h^{n+1}|}{(n+1)!}.$$

Puisque $f^{(n+1)}$ est continue, la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur l'intervalle $[x-h, x+h]$, disons par C. On a donc

$$\left|f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \cdots - f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}\right| \leq \frac{C}{(n+1)!}|h^{n+1}|,$$

d'où la conclusion.

$\square$

Comment cette notation est-elle utile en informatique? Lorsqu'on analyse un algorithme, il est important de savoir si l'algorithme effectue un grand nombre d'opérations. Comme il est bien trop difficile de calculer explicitement ce nombre, on utile des ordres de grandeur. C'est là où la notation grand O est utile.

Exemple 19. On considère le programme suivant qui permet de determiner si un nombre x appartient à une liste ordonnée L de nombres*.

Fonction chercher x dans L.
Soit x un nombre et $L = (x_1, \ldots, x_n)$ une liste ordonnée de nombres de longueur n.
1. Choisir $a \leftarrow 1$ et $b \leftarrow n$.
2. **Tant que** $a \leq b$:
    choisir $m \leftarrow \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$.
    Si $x = x_m$,
        renvoyer m,
    sinon si $x < x_m$,
        choisir $a \leftarrow m - 1$,
    sinon si $x > x_m$,
        choisir $b \leftarrow m + 1$.
3. **Renvoyer** $\emptyset$. `// Si on se rend ici, on n'a rien trouvé.`

Le but de l'exemple n'est pas de vérifier que l'algorithme fonctionne, mais plutôt de vérifier qu'il est *efficace*. On détermine l'efficacité en fonction de la longueur de la liste n.

* Le pseudo-code est inspiré de la documentation de Python.

On définit une fonction $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ comme suit : $f(n)$ désigne le nombre d'opérations effectuer pour accomplir l'algorithme pour une liste L de longueur n dans le cas où la recherche est la plus longue possible. Calculer f explicitement serait bien trop diffcile, voire imposible. Au lieu, on montre que $f(x) = O(\log n)$ lorsque $n \to \infty$.

L'idée est la suivante : la boucle de l'étape 2 peut s'effectuer au plus $\lfloor \log_2 n \rfloor + 2$ fois, car à la j-ième itération, on voit que
$$b - a \leq \frac{n+1}{2^j}$$
et pour $j = \lfloor \log_2 n \rfloor + 2$, on a
$$2^j = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 + 1} = 2 \cdot 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} \geq 2 \cdot 2^{\log_2 n} = 2n.$$
Ainsi, il s'ensuit que
$$b - a \leq \frac{n+1}{2^j} \leq \frac{n+1}{2n} < 1,$$
donc $b = a$ puisque b et a sont entiers.

Ensuite, si à chaque fois que l'on exécute la boucle, on effectue au plus C opérations, on obtient la borne
$$f(n) \leq C(\lfloor \log_2 n \rfloor + 2) + D,$$
où D est le nombre d'opérations effectuées dans les autres étapes à l'extérieur de la boucle et qui ne dépend pas de n. Ceci montre que $f(n) = O(\log_2 n)$. Enfin, puisque $\log_2 n = \frac{\log n}{\log 2}$, on a également $f(n) = O(\log n)$.

Habituellement, on dit qu'un algorithme est efficace lorsque le nombre d'opérations est de l'ordre d'un grand O(polynôme) dans la dimension qui croît (dans l'exemple précédent, cette dimension est la longueur de la liste). Si l'ordre de grandeur est un grand $O(\log n)$, c'est encore mieux!