Devoir 2

Analyse 2

Automne 2021

Le devoir est à remettre jeudi le 25 novembre au début du cours. Vous devez remettre votre devoir papier en main. Je n'accepte pas les devoirs remis par courriel, sauf en situation exceptionnelle.

Si vous écrivez votre devoir à la main, écrivez à double interligne. **Si votre devoir n'est pas propre**, alors je le refuserai et vous aurez une journée pour le réécrire plus propre.

Si vous tapez votre devoir, laissez des grosses marges (au moins 1,5 pouce) ou bien écrivez à double interligne. J'ai mis un gabarit LaTeX sur le site du cours pour ceux et celles qui souhaitent l'utiliser.

Le devoir est sur 20 points.

Justifiez vos réponses.

Exercice 1. *(8pts)* Soit $f, g\colon [a,b] \to [0,\infty)$ des fonctions continues et positives ou nulles. On suppose qu'il existe $C \geq 0$ tel que

$$f(x) \leq C + \int_a^x fg$$

pour tout $x \in [a,b]$.

a) Montrer que
$$f(x) \leq C \exp\left(\int_a^x g\right)$$
pour tout $x \in [a,b]$.
Indication. Il y a deux méthodes assez différentes pour faire la question. Pour la première, supposez d'abord que $C > 0$ et considérer $h(x) = C + \int_a^x fg$ et sa dérivée. Il faudra utiliser un argument de limite pour le cas où $C = 0$. Pour la deuxième méthode, pensez à une fonction bien choisie de sorte que l'hypothèse permette de montrer que sa dérivée est négative. Pas besoin de supposer que $C \neq 0$ pour cette méthode.

b) On suppose qu'il existe deux fonctions continues $\varphi, h\colon [a,b] \to [0,\infty)$ avec φ continûment dérivable telles que $\varphi'(x) \leq h(x)\varphi(x)$. Montrer que si $\varphi(a) = 0$, alors φ est identiquement nulle.

Exercice 2. *(8pts)* Soit $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale impropre $\int_a^b |g|$ converge.

a) Montrer que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b g(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x = 0.$$

Indices. 1. Faites un changement de variable $u = x - \frac{\pi}{\lambda}$. Remarquez que g est uniformément continue sur $[a+\delta, b-\delta]$ quelque soit $\delta > 0$ petit.

2. Pour λ assez grand, on a que $a < b - \frac{\pi}{\lambda}$. Montrez que $\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a g(t+\frac{\pi}{\lambda})e^{i\lambda t}\mathrm{d}t \to 0$ lorsque $\lambda \to \infty$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrez que pour tout $\delta_1 > 0$ petit, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $\int_{a+\delta_1}^{b-\delta_1} |g(x+\frac{\pi}{\lambda}) - g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$ lorsqu'on a $\frac{\pi}{\lambda} < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Choisissez bien δ_1.

b) Interpréter le résultat du a) en terme de « fréquence ».

Exercice 3. *(4pts)* Montrer que la fonction sinus n'est solution d'aucune équation algébrique. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il n'existe pas de fonctions rationnelles $f_0, \ldots, f_{n-1}$ telles que

$$\sin^n x + f_{n-1}(x)\sin^{n-1}(x) + \cdots + f_1(x)\sin x + f_0(x) = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. *(Bonus* 2pts, tout ou rien)* Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que pour tout $c \in (a,b)$

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f.$$

* Le bonus s'applique à la note de l'examen intra. Votre note d'examen ne peut pas dépasser le maximum de 36. Tout ou rien signifie que vous aurez soit 2 points si c'est la bonne réponse ou aucun point dès qu'il y a *une* erreur.