Analyse 2

Note de cours fait par Jonathan Godin*

Table des matières

* Ces notes sont en grande partie inspirées de mes notes prises en classe au cours d'analyse 2 donné par Thomas Ransford à l'Université Laval à l'automne 2012.

18/10/2021

Introduction

Ce document constitue les notes de cours pour le cours d'analyse 2 à l'Université de Montréal. Ce texte traite de l'analyse des fonctions d'une variable réelle et fait suite à la matière du cours d'analyse 1. Le premier chapitre complète le calcul différentiel et intégral. Les autres chapitres sont plutôt axés sur la théorie des fonctions, plus précisément la notion de suite de fonctions et des différentes convergences, des liens entre la dérivée, l'intégral et la limite et les séries de fonctions et, enfin, la décomposition d'une fonction en une série de Fourier.

Idée inspirée du TeXbook, les paragraphes comme celui-ci, précédés d'un sinus du topologue, contiennent des remarques ou des explications qui peuvent être ignorées lors d'une première lecture. Ils sont composés en taille 10pt, donc on peut facilement savoir où se termine le passage. Ces sections seront étiquetés ainsi pour l'une des raisons suivantes : des outils qui ne sont pas supposés maîtrisés pour le cours sont utilisés, le raisonnement devient un peu plus difficile à suivre (c'est ce qui a inspiré le symbole), le contenu s'éloigne un peu trop de la discussion ou du cadre du cours, un exercice plus difficile.

Retour sur la continuité et la continuité uniforme

La continuité et la continuité uniforme sont deux notions proches, mais distinctes. On les rappelle ici. La continuité est utile partout en analyse et la continuité uniforme sera utilisé au chapitre 1.

Pour toute la section, on considère $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle (borné ou non) et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1. (Continuité) On dit que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *continue en* $x_0 \in I$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, on a

$$|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

On dit que f est *continue* si f est continue pour tout $x \in I$.

****

Définition 2. (Continuité uniforme) On dit $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in I$, on a

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

****

La différence entre les définitions est que pour la continuité uniforme, δ doit être adéquat pour tout $x, y \in I$, alors que pour la continuité en un point, δ peut varier en tout point. La continuité uniforme entraine la continuité, mais l'inverse est fausse en général. Voici un contre exemple.

Exemple 3. Soit $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Elle est bien sûre continue. Pour voir qu'elle n'est pas uniformément continue, on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ensuite, on considère $0 < \delta < \frac{1}{2}$ quelconque (si $\delta \geq \frac{1}{2}$, il suffit de prendre $x = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{2}$ pour obtenir une contradition). On restreint x à l'intervalle $(0, \frac{3}{4})$ et on pose $y = x + \frac{\delta}{2}$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \\
&= \left|\frac{x-y}{xy}\right| \\
&= \frac{\delta}{2}\frac{1}{|x(x+\frac{\delta}{2})|} \\
&\geq \frac{\delta}{2}\frac{1}{|x|}\frac{1}{(1+\frac{\delta}{2})}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $x < \frac{\delta}{1+\frac{\delta}{2}} < \frac{1}{2}$ on obtient

$$|f(x) - f(y)| > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

On conclut que f n'est pas uniformément continue. $\square$

Le problème de ce contre-exemple est que quand x tend vers 0^+, f tend vers l'infinie. En fait, on a une réciproque partielle.

Théorème 4. *Soit $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si les limites*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b^-} f(x)$$

existent, alors f est uniformément continue.

En particulier, si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle compact $[a,b]$, alors f est uniformément continue.

La continuité uniforme sera fort utile pour déterminer l'intégrabilité d'une fonction.

Enfin, on rappelle les résultats suivants concernant les fonctions continues.

Théorème des valeurs intermédiaires 5. (TVI) *Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ et pour tout c tel que $f(x) < c < f(y)$ ou $f(y) < c < f(x)$, il existe z tel que $x < z < y$ et $f(z) = c$.*

Théorème 6. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si I est un intervalle compact, alors f atteint son maximum et son minimum. En particulier, f est bornée.*

Retour sur la dérivée d'une fonction

On rappelle que f est *dérivable* en $x \in I$ si la limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe. Dans ce cas, on la note $f'(x)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$. On dit que f est dérivable si f est dérivable pour tout $x \in I$.

On étend la notion de dérivée aux intervalles fermés. Si f est définie sur un intervalle de la forme $[a, b)$ ou $[a, b]$, on définit la dérivée à gauche par

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

lorsque la limite existe. La limite à droite, sur un intervalle de la forme $(a, b]$ ou $[a, b]$ se définit de façon analogue.

Si on dit que f est dérivable, cela veut dire que f est dérivable en tout $x \in I$, y compris à droite ou à gauche si l'intervalle inclut l'une de ses extrémités.

Un résultat important des fonctions dérivables est le suivant.

Théorème des accroissements finis 7. *(TAF) Si $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors pour tout $x, y \in (a, b)$ tels que $x < y$, il existe $\xi \in (x, y)$ tel que*

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$

Corollaire 8. *Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continument dérivable, alors pour tout $x < y$ dans I, il existe $M \geq 0$ tel que*

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|.$$

Théorème des développements limités 9. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$, soit $n \geq 1$ et on suppose que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \varepsilon(h) h^n,$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Classes de fonctions dérivables

On introduit les espaces de fonctions suivants.

Définition 10. Soit I un intervalle ouvert (borné ou non).

1. On définit l'ensemble $C^0(I)$ par
$$C^0(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\}.$$
2. On définit l'ensemble $C^1(I)$ par
$$C^1(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable et } f' \in C^0(I)\}.$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit
$$C^n(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable et } f' \in C^{n-1}(I)\}.$$
4. On définit l'ensemble $C^\infty(I)$ par
$$C^\infty(I) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I).$$

Lorsque $f \in C^n(I)$, on dit que f est *de classe C^n*.

****

Autrement dit, $C^n(I)$ est l'espace des fonctions n-fois dérivables dont la dérivée n-ième est continue. L'ensemble $C^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivable. Si I est un intervalle, c'est un ensemble non vide, puisque les fonctions constantes en font partie.

Il en va de soi que l'on a les inclusions suivantes

$$C^\infty(I) \subset \cdots \subset C^n(I) \subset \cdots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I).$$

De plus, les inclusions sont strictes, puisque la fonction $f(x) = (\max\{0, x\})^n$ est $n-1$-fois dérivable, mais pas n-fois.

Les ensembles $C^n(I)$ forment un espace vectoriel pour chaque $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. En effet, si $f, g, h \in C^n(I)$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors
(1) $\alpha f \in C^n(I)$;
(2) $\alpha f + \beta g \in C^n(I)$;
(3) $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.
Quelle est alors la dimension de l'espace? En fait, il s'agit d'un espace de dimension *infinie*. L'espace est donc plus difficile à cerner, puisqu'on ne peut pas facilement utiliser une base et des matrices pour travailler. Par exemple, pour $x \in I$, on peut définir une application linéaire $L_x\colon C^n(I) \to \mathbb{R}$ par

$$L_x(f) = f(x),$$

mais cette application ne se représente pas par une matrice.

On peut étendre la définition de C^n aux intervalles qui ne sont pas ouverts. Pour C^0, il suffit d'ajouter la continuité à gauche ou à droite, le cas échéant. Pour $n > 0$, si I est un intervalle de la forme $(a, b]$, alors on définit

$$C^n(I) := \left\{ f \in C^0(I) \;\middle|\; f\big|_{(a,b)} \in C^n(a, b) \text{ et } \lim_{x \to b^-} f^{(j)}(x) \text{ existe pour tout } j \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

On définit $C^n(I)$ de façon similaire pour les cas $I = [a, b)$ et $I = [a, b]$.

Petit o et grand O

On utilisera la notation du petit o de Landau.

Définition 11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit r et h deux fonctions définies sur un voisinage de a. On dit que r est *un petit* $o(h(x))$ *lorsque* $x \to a$ (dit « petit o de h ») si

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{h(x)} = 0.$$

Par abus de notation, on écrit parfois $r(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$. Lorsque le contexte est clair, on écrira simplement $r(x) = o(h(x))$.

****

Exemple 12.

- $f(x) = x$ est un petit $o(1)$ lorsque $x \to 0$ (dit « petit o de 1 »), puisque $\lim_{x \to 0} x/1 = 0$. Cependant, f n'est pas un $o(x)$, car $\lim_{x \to 0} x/x = 1 \neq 0$.
- $g(x) = \sqrt{x}$ est un $o(x^{1/3})$ lorsque $x \to 0$. En fait, g est un $o(x^\varepsilon)$ pour tout $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$.
- $h(x) = 1 - \cos x$ est un $o(x)$ lorsque $x \to 0$, car, par la règle de l'Hôpital, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1} = 0.$$

La proposition suivante illustre un peu mieux comment cette notation sera utile.

Proposition 13. *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h), \tag{$*$}$$

pour tout $|h|$ assez petit. Dans ce cas, on a $f'(x_0) = A$.

Démonstration. On suppose que f est dérivable. Dans ce cas, on pose

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h,$$

où h est assez petit pour que f soit définie en $x_0 + h$. On voit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

et donc r est un $o(h)$. Ainsi, l'équation $(*)$ est vérifiée avec $A = f'(x_0)$.

Maintenant, on suppose qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $(*)$ est vraie. On a alors

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \frac{o(h)}{h}.$$

Lorsque $h \to 0$, le côté droit converge vers A, donc le côté gauche converge également. Ainsi, on a bien que $f'(x_0)$ existe et $f'(x_0) = A$.

□

En fait, la proposition se généralise partiellement pour les dérivées d'ordre supérieur.

Exercice 1 Développements limités. Montrer que si f est n-fois dérivable en x_0, alors

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

La notation du petit o aide énormément pour faire les calculs dans certaines situations.

Exemple 14. *Calculer* $\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)^n}{x^{2n}}$. Le développement limité de $\cos x$ en 0 est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{(\cos x - 1)^n}{x^{2n}} &= \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1)^n}{x^{2n}} \\
&= \frac{(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^n}{x^{2n}} \\
&= \frac{(-1)^n \frac{1}{2^n} x^{2n} + o(x^{2n})}{x^{2n}} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n} + o(1).
\end{aligned}$$

On voit que la limite lorsque $x \to 0$ vaut $\frac{(-1)^n}{2^n}$.

La prochaine notation est celle du grand O. Elle est particulièrement utile en informatique, pour l'analyse d'algorithme.

Définition 15. 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f, g\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On dit que f est *un grand $O(g(x))$ lorsque $x \to \infty$* s'il existe $M \geq a$ et $C > 0$ tels que pour tout $x \geq M$, on a

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0. On dit que f est un *grand $O(g(x))$ lorsque $x \to x_0$* s'il existe $C, m > 0$ tel que si $|x - x_0| < m$, alors on a

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

****

Lorsque le contexte est clair, on ne précisera pas vers quelle valeur x tend. On commence par le cas où $x \to \infty$.

Exemple 16.
- $f(x) = x$ est un $O(x)$, puisque $x \leq x$ pour tout x. En fait, f est un $O(x^n)$ pour tout $n \geq 1$.
- Une fonction bornée g est un $O(1)$, car $g(x) \leq C$ pour tout x. Par exemple, $g(x) = \sin(x)$ est un $O(1)$.
- $h(x) = e^x$ n'est pas un $O(x^n)$ pour aucun $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 Soit $f, g\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ deux fonctions. Montrer que si

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

Ensuite, on s'attarde au grand O lorsque $x \to a$. Voici des exemples.

Exemple 17.
- $f(x) = x$ est un $O(x)$ lorsque $x \to 0$.
- $g(x) = \sin x$ est un $O(x)$ lorsque $x \to 0$.
- $h(x) = e^x$ est un $O(1)$ lorsque $x \to a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit $a > 0$ et $f, g\colon (-a, a) \to (0, \infty)$. Montrer que si la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

On a vu que le petit o est intimement lié aux développements limités. Le grand O est quant à lui lié au développement de Taylor.

Théorème 18. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur I. Alors pour $|h|$ assez petit, on a*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + O(h^{n+1}).$$

Démonstration. Par le théorème de Taylor, pour h si petit que f est définie sur $[x-h, x+h]$, il existe ξ tel que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ainsi, on voit que

$$\left| f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \cdots - f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} \right| = |f^{(n+1)}(\xi)|\frac{|h^{n+1}|}{(n+1)!}.$$

Puisque $f^{(n+1)}$ est continue, la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur l'intervalle $[x-h, x+h]$, disons par C. On a donc

$$\left| f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \cdots - f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} \right| \leq \frac{C}{(n+1)!}|h^{n+1}|,$$

d'où la conclusion.

□

Comment cette notation est-elle utile en informatique? Lorsqu'on analyse un algorithme, il est important de savoir si l'algorithme effectue un grand nombre d'opérations. Comme il est bien trop difficile de calculer explicitement ce nombre, on utile des ordres de grandeur. C'est là où la notation grand O est utile.

Exemple 19. On considère le programme suivant qui permet de determiner si un nombre x appartient à une liste ordonnée L de nombres*.

Fonction chercher x dans L.
Soit x un nombre et $L = (x_1, \ldots, x_n)$ une liste ordonnée de nombres de longueur n.
1. Choisir $a \leftarrow 1$ et $b \leftarrow n$.
2. **Tant que** $a \leq b$:
    choisir $m \leftarrow \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$.
    Si $x = x_m$,
        renvoyer m,
    sinon si $x < x_m$,
        choisir $b \leftarrow m - 1$,
    sinon si $x > x_m$,
        choisir $a \leftarrow m + 1$.
3. **Renvoyer** $\emptyset$. `// Si on se rend ici, on n'a rien trouvé.`

Le but de l'exemple n'est pas de vérifier que l'algorithme fonctionne, mais plutôt de vérifier qu'il est *efficace*. On détermine l'efficacité en fonction de la longueur de la liste n.

* Le pseudo-code est inspiré de la documentation de Python.

On définit une fonction $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ comme suit : $f(n)$ désigne le nombre d'opérations effectuer pour accomplir l'algorithme pour une liste L de longueur n dans le cas où la recherche est la plus longue possible. Calculer f explicitement serait bien trop diffcile, voire imposible. Au lieu, on montre que $f(x) = O(\log n)$ lorsque $n \to \infty$.

L'idée est la suivante : la boucle de l'étape 2 peut s'effectuer au plus $\lfloor \log_2 n \rfloor + 2$ fois, car à la j-ième itération, on voit que

$$b - a \leq \frac{n+1}{2^j}$$

et pour $j = \lfloor \log_2 n \rfloor + 2$, on a

$$2^j = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 + 1} = 2 \cdot 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} \geq 2 \cdot 2^{\log_2 n} = 2n.$$

Ainsi, il s'ensuit que

$$b - a \leq \frac{n+1}{2^j} \leq \frac{n+1}{2n} < 1,$$

donc $b = a$ puisque b et a sont entiers.

Ensuite, si à chaque fois que l'on exécute la boucle, on effectue au plus C opérations, on obtient la borne

$$f(n) \leq C(\lfloor \log_2 n \rfloor + 2) + D,$$

où D est le nombre d'opérations effectuées dans les autres étapes à l'extérieur de la boucle et qui ne dépend pas de n. Ceci montre que $f(n) = O(\log_2 n)$. Enfin, puisque $\log_2 n = \frac{\log n}{\log 2}$, on a également $f(n) = O(\log n)$.

Habituellement, on dit qu'un algorithme est efficace lorsque le nombre d'opérations est de l'ordre d'un grand O(polynôme) dans la dimension qui croît (dans l'exemple précédent, cette dimension est la longueur de la liste). Si l'ordre de grandeur est un grand $O(\log n)$, c'est encore mieux!

Chapitre 1

Calcul intégral

Définir rigoureusement l'intégral de Riemann se fait à l'aide des sommes de Riemann. L'idée consiste à approximer l'aire par des rectangles. Pour définir la notion, on fera intervenir l'intégrale supérieure et inférieure, qui est une approche un peu différente de prendre la limite d'une somme de Riemann, comme on l'aurait vu dans un cours de cégep. Il y a différentes approches équivalentes, mais l'on choisit celle de Darboux puisqu'elle fournit un critère d'intégrabilité plus commode.

Une fois que l'intégrale sera définie rigoureusement, il sera de mise d'effectuer une étude de ses propriétés. Une autre partie importe du chapitre sera de déterminer un critère pour établir l'intégrabilité d'une fonction.

Ensuite, le célèbre théorème fondamental du calcul, le grand théorème d'analyse réelle qui lie le calcul différentiel au calcul intégral, sera énoncé et démontré.

Quelques techniques d'intégration seront abordées par la suite. Le chapitre se terminera par l'extention de l'intégrale de Riemann, à savoir les intégrales impropre. Le test de l'intégrale, pour les séries, sera également démontré au passage.

1.1. Définition de l'intégrale de Riemann

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Le but est donner un sens précris à la notion « d'aire sous la courbe ». Pour ce faire, on introduit quelques définitions. La notion que l'on définit devrait avoir les propriétés géométriques suivantes.

1. L'aire sous la courbe de f et de g devrait s'additionner pour donner l'aire sous la courbe de $f+g$.
2. L'aire sous la courbe de f des intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$ devraient s'additionner pour donner l'aire sous la courbe de $[a,b]$.
3. L'aire sous la courbe d'un rectangle et d'un cercle devraient correspondre à l'aire d'un rectangle et d'un cercle. (Et de même pour tout autre forme pour lequel on connait l'aire, comme une ellipse.)

On verra à la prochaine section que la notion d'intégrale que l'on définit respecte ces propriétés.

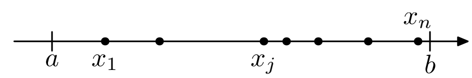
Définition 1.1.1. Une *subdivision* (partition) de $[a,b]$ est un sous-ensemble fini

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

de $[a,b]$ tel que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

****

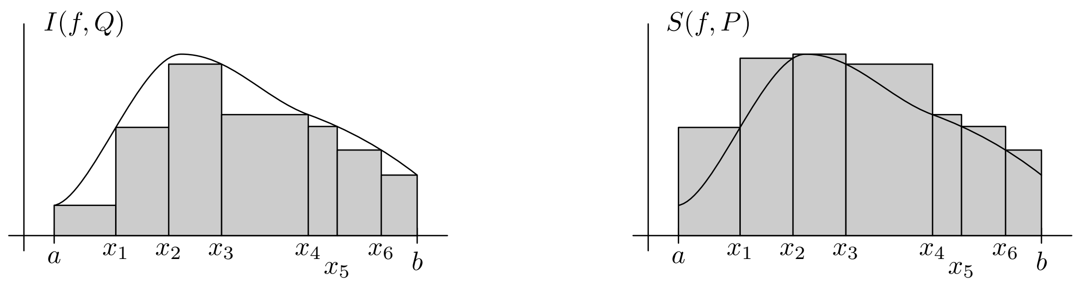


Définition 1.1.2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ une partition de $[a,b]$. Alors on définit

$$S(f,\mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \qquad \text{où } M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

$$I(f,\mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \qquad \text{où } M_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f.$$

****



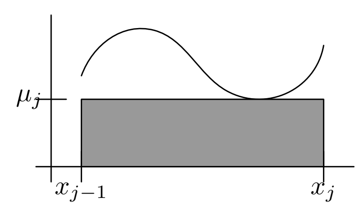
Les sommes dans $I(f,P)$ et $S(f,P)$ correspondent géométriquement à la somme de l'aire des rectangles de base $x_j - x_{j-1}$ et de hauteur respective $\inf f$ et $\sup f$.

On voit que $I(f,P)$ sera toujours une sous-estimation de l'aire et que $S(f,P)$, une surestimation.

Lemme 1.1.3. *Pour toutes subdivisions P, Q, on a $I(f,P) \leq S(f,Q)$.*

Démonstration. Soit $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ et $Q = \{y_0, \dots, y_m\}$. On a

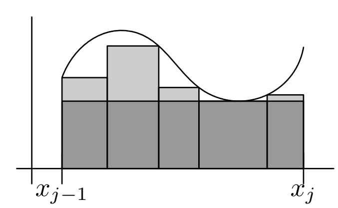
$$\begin{aligned} I(f,P) &\overset{(1)}{\leq} I(f, P \cup Q) \\ &\leq S(f, P \cup Q) \\ &\overset{(2)}{\leq} S(f,Q), \end{aligned}$$



Représentation géométrique du terme $\mu_j(x_j - x_{j-1})$ de la somme $I(f,P)$.

où on obtient (1) et (2) comme suit. On écrit

$$P \cup Q = \{z_0, \dots, z_{m+n+2}\}$$



Représentation géométrique de la somme $(*)$, qui fait partie de $I(f, P \cup Q)$.

et on note $z_{k_0} = x_0$, $z_{k_1} = x_1, \ldots$, $z_{k_n} = x_n$. De plus, on note

$$m_j := \inf_{[z_{j-1}, z_j]} f \qquad \text{et} \qquad \mu_j := \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f.$$

Pour $1 \leq j \leq n$ et $k_{j-1} < \ell \leq k_j$, on a $m_\ell \geq \mu_j$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
(*) \qquad & \sum_{\ell = k_{j-1}+1}^{k_j} m_\ell (z_\ell - z_{\ell-1}) \\
& \geq \sum_{\ell = k_{j-1}+1}^{k_j} \mu_j (z_\ell - z_{\ell-1}) \\
& = \mu_j (z_{k_j} - z_{k_{j-1}}) = \mu_j (x_j - x_{j-1}).
\end{aligned}$$

En prenant la somme de $j = 1$ à n de chaque côté, on obtient $I(f, P \cup Q) \geq I(f, P)$.
L'inégalité (2) se fait de façon analogue.

□

Définition 1.1.4. On définit l'*intégrale supérieure* et *inférieure* respectivement par

$$\overline{\int_a^b} f := \inf_P \{S(f, P)\} \qquad \text{et} \qquad \underline{\int_a^b} f := \sup_P \{S(f, P)\},$$

où lee supremum et l'infimum est pris sur toutes les subdivisions P possible de $[a, b]$.

****

En général, l'infimum de l'intégrale supérieure n'est pas atteint. Il existe toutefois une suite de partitions (P_n) telle que $S(f, P_n) \to \overline{\int_a^b} f$. De même pour l'intégrale inférieure.

Lemme 1.1.5. $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

Démonstration. On a $I(f, P) \leq S(f, Q)$ pour tout P, Q. Prenons $\sup_P$:

$$\underline{\int_a^b} f \leq S(f, Q) \qquad \text{pour tout } Q.$$

Prenons $\inf_Q$:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

□

Définition 1.1.6. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Elle est *intégrable* (au sens de Riemann) si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Dans ce cas, on note la valeur commune $\int_a^b f$ (ou $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$).

****

Exemple 1.1.7. $f(x) = c$ (const.) sur $[a,b]$.

Prenons $P = \{a,b\}$. Alors

$$S(f,P) = c(b-a),$$
$$I(f,P) = c(b-a).$$

On a donc $\overline{\int_a^b} f \leq c(b-a)$ et $\underline{\int_a^b} f \geq x(b-a)$. On conclut que

$$c(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq c(b-a),$$

c'est-à-dire que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c(b-a)$. Conclusion : $\int_a^b f = c(b-a)$.

Remarque. Cet exemple démontre que l'aire sous la courbe d'une droite horizontale correspond bien à l'aire d'un rectangle.

****

Exemple 1.1.8. $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$.

Soit $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. On a alors

$$\begin{aligned} S(f,P_n) &= \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 \\ &= \frac{1}{6n^3}(n(n+1)(2n+1)) \\ &= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\ &\longrightarrow \frac{1}{3} \qquad \text{lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

Il suit que

$$\overline{\int_0^1} f \leq \frac{1}{3}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
I(f, P_n) &= \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} (j-1)^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \\
&= \frac{1}{6n^3} (n-1)n(2n-1) \\
&= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \\
&\longrightarrow \frac{1}{3} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Il suit que

$$\underline{\int_0^1} f \geq \frac{1}{3}.$$

Pour résumé, on a obtenu

$$\frac{1}{3} \leq \underline{\int_0^1} f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{résultat} \\ \text{général}}}{\leq} \overline{\int_0^1} f \leq \frac{1}{3}.$$

Conclusion : $f(x) = x^2$ est intégrable sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 f = \frac{1}{3}$.

Exemple 1.1.9. f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ est rationnel,} \\ 0, & \text{si } x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$

Soit P une subdivision quelconque de $[0, 1]$. Chaque intervalle $[x_j, x_{j-1}]$ contient des rationnels et des irrationnels. Donc on voit que

$$\begin{aligned} M_j &= 1 \ \ \forall j, \\ m_j &= 0 \ \ \forall j. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
S(f,P) &= \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) \\
&= 1, \\
I(f,P) &= \sum_{j=1}^{n} 0(x_j - x_{j-1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\underline{\int_0^1} f &= \sup_P I(f,P) = 0, \\
\overline{\int_0^1} f &= \int_P S(f,P) = 1.
\end{aligned}$$

Conclusion : f n'est pas intégrable (au sens de Riemann).

1.2. Propriétés de l'intégrale

1. Si f est intégrable sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, alors elle est intégrable sur $[a,c]$ et

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

2. Si f, g sont intégrables sur $[a,b]$, alors $f+g$ l'est aussi et

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

3. Si f est intégrable sur $[a,b]$, et si $c \in \mathbb{R}$, alors cf est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b cf = c\left(\int_a^b f\right).$$

4. Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Ces propriétés en sont que l'on s'attend à ce que « l'aire sous la courbe » devrait avoir.

Démonstration de

2. . Prenons des subdivisions P, Q de $[a, b]$. Alors

$$\begin{aligned} S(f,P)+S(g,Q) &\geq S(f,P\cup Q)+S(g,P\cup Q) \\ &\geq S(f+g,P\cup Q)(\sup_A(f+g)\leq \sup_A f+\sup_A g) \\ &\geq \overline{\int_a^b}(f+g). \end{aligned}$$

Pour résumer, on a obtenu $S(f,P)+S(g,Q)\geq \overline{\int_a^b}(f+g)$. Prenons $\inf\limits_P$ et $\inf\limits_Q$:

$$\overline{\int_a^b} f+\overline{\int_a^b} g\geq \overline{\int_a^b}(f+g).$$

De la même façon, on obtient

$$\underline{\int_a^b} f+\underline{\int_a^b} g\leq \underline{\int_a^b}(f+g).$$

À nouveau, pour résumer, on a obtenu

$$\underline{\int_a^b} f+\underline{\int_a^b} g\leq \underline{\int_a^b}(f+g)\leq \overline{\int_a^b}(f+g)\leq \overline{\int_a^b} f+\underline{\int_a^b} g.$$

Comme f et g sont intégrables, on a

$$\begin{aligned} &\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f=\int_a^b f \\ \text{et}\quad &\underline{\int_a^b} g=\overline{\int_a^b} g=\int_a^b g. \end{aligned}$$

On conclut que

$$\underline{\int_a^b}(f+g)=\overline{\int_a^b}(f+g),$$

d'où $f+g$ est intégrable et

$$\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g.$$

$\square$

Inégalité triangulaire

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Démonstration. On a d'une part

$$f \leq |f| \overset{\mathbf{4.}}{\Rightarrow} \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

et d'autre part

$$-f \leq |f| \overset{\mathbf{4.}}{\Rightarrow} \int_a^b -f \overset{\mathbf{3.}}{=} -\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Donc on obtient

$$\pm \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

ce qui veut dire que

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

□

1.3. Intégrabilité des fonctions continues

Théorème 1.3.1. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors elle est intégrable.*

On rappelle que si f est continue sur $[a,b]$, alors f est bornée et f est uniformément continue.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$, on a

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \tag{$*$}$$

Prenons une subdivision $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ telle que $x_j - x_{j-1} \leq \delta$ pour tout j. Par $(*)$, il suit que

$$\sup_{[x_{j-1},x_j]} f \leq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f + \varepsilon$$

pour chaque j, c'est-à-dire que

$$M_j \leq m_j + \varepsilon \qquad \forall j. \tag{$**$}$$

Puisque f est bornée, il s'ensuit que $S(f,P)$ et $I(f,P)$ sont bien définis. On a donc

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f &\leq S(f,P) \\ &= \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{j=1}^{n} (m_j + \varepsilon)(x_j - x_{j-1}) && \text{(par } (**)\text{)}\\
&= \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon (x_j - x_{j-1})\\
&= I(f, P) + \varepsilon(b-a)\\
&\le \underline{\int_a^b} f + \varepsilon(b-a).
\end{aligned}
$$

Autrement dit, on a

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} f + \varepsilon(b-a) \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

On conclut que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

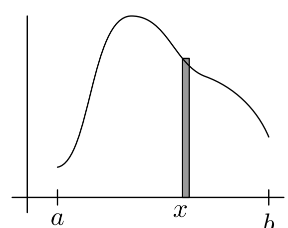
c'est-à-dire que f est intégrable.

$\square$

1.4. Théorème fondamental du calcul

Le lien entre l'intégration et la dérivation semble ténu à première vue. En y réfléchissant un peu, il est toutefois impératif que le lien existe! En effet, si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et si on pose

$$F(x) = \int_a^x f,$$



alors

$$F(x+h) - F(x) \approx \text{l'aire d'un rectangle} = \underbrace{f(x)}_{\text{hauteur}} \cdot \underbrace{h}_{\text{base}}$$

et donc on se convainc que $F'(x) = f(x)$. Évidemment l'aire n'est pas exactement celle d'un rectangle et la hauteur n'est pas exactement $f(x)$, mais lorsque h est petit, c'est une approximation évocatrice.

Théorème fondamental du calcul 1. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ par*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Alors F est dérivabl et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Démonstration. Prenons $c \in [a,b)$ et $h > 0$. Alors on a

$$
\begin{aligned}
F(c+h) - F(c) &= \textstyle\int_a^{c+h} - \int_a^c f\\
&= \textstyle\int_c^{c+h} f.
\end{aligned}
$$

On a

$$h \inf_{[c,c+h]} f \leq \int_c^{c+h} f \leq h \sup_{[c,c+h]} f$$

et donc

$$\inf_{[c,c+h]} f \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq \sup_{[c,c+h]} f.$$

Lorsque $h \to 0^+$, on sait que

$$\inf_{[c,c+h]} f \to f(c) \quad \text{et} \quad \sup_{[c,c+h]} f \to f(c)$$

puisque f est continue.

Par le théorème des deux gendarmes, ceci implique que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c).$$

Le même argument pour $h < 0$ montre que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c).$$

Conclusion : F est dérivable en c et $F'(c) = f(c)$.

$\square$

Théorème fondamentale du calcul 2. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $F' = f$. Alors*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

*Démonstration***.** On pose

$$F_1(x) = \int_a^x f.$$

D'après le TFC1, on sait que $F_1' = f$. Aussi, par hypothèse, on a $F' = f$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(F_1 - F)' &= F_1' - F' \\ &= f - f \\ &= 0.\end{aligned}$$

On conclut que $F_1 - F = C$, une constance. En particulier, on a

$$\begin{aligned}F(b) - F_1(b) &= F(a) - F_1(a) \\ F(b) - \textstyle\int_a^b f &= F(a) - 0 \\ \textstyle\int_a^b f &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

$\square$

Remarque. La fonction F s'appelle une *primitive* de f. Selon le TFC1, une primitive existe toujours (lorsque f est continue) et selon le TFC2, une primitive est unique à l'addition d'une constante près. Souvent, on écrit $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.

****

Exemple 1.4.1. $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$

On peut prendre $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. On obtient

$$\int_0^1 f = F(1) - F(0) = \tfrac{1}{3}(1)^3 - \tfrac{1}{3}(0)^3 = \tfrac{1}{3}.$$

1.5. Techniques d'intégration

1. Intégration par partie

Soit $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables avec u', v' continues. Alors

$$\int_a^b uv' = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b vu'.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \textstyle\int_a^b uv' + \int_a^b u'v &= \textstyle\int_a^b (uv' + v'u) \\ &= \textstyle\int_a^b (uv)' \\ &\overset{TFC2}{=} u(b)v(b) - u(a)v(a) \end{aligned}$$

□

Exemple 1.5.1.

$$\begin{aligned} \int_a^b \log x \mathrm{d}x &= \Big[x \log x\Big]_a^b - \int_a^b x\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \Big[x \log x - x\Big]_a^b. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &= \log x & \mathrm{d}v &= \tfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= 1\mathrm{d}x & v &= x \end{aligned}$$

2. Intégration par substitution

Soit $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g\colon [a,b] \to [c,d]$ une fonction continue, dérivable et avec g' continue. Alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}x.$$

Remarque. Si $g(a) > g(b)$, alors il faut interpreter

$$\int_{g(a)}^{g(b)} = -\int_{g(b)}^{g(a)}.$$

****

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $[c, d]$. Alors, d'une part, on a

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u \overset{\text{TFC2}}{=} F(g(b)) - F(g(a)).$$

(Vrai même si $g(a) > g(b)$.) D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b F'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b (F \circ g)'(x)\mathrm{d}x \\
&= F \circ g(b) - F \circ g(a) \\
&= F(g(b)) - F(g(a)) \\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.5.2. On pose $L(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$. On a

$$\begin{aligned}
L(xy) &= \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} && \begin{aligned} u &= \tfrac{t}{x} \\ x\mathrm{d}u &= \mathrm{d}t \end{aligned} \\
&= L(x) + \int_1^y \frac{x\mathrm{d}u}{xu} \\
&= L(x) + L(y).
\end{aligned}$$

3. Simplication algébrique

Exemple 1.5.3.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{u-1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u && \begin{aligned} u &= \log x \\ \mathrm{d}u &= \tfrac{1}{x}\mathrm{d}x \end{aligned} \\
&= \int_1^2 (u^{1/2} - u^{-1/2})\mathrm{d}u \\
&= \left[\tfrac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\right]_1^2 \\
&= \tfrac{4}{3} - \tfrac{2}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

4. Simplication trigonométrique

Exemple 1.5.4.
$$\int \cos x \cos(2x)\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x + \cos(3x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin(3x)}{6}.$$

5. Fractions partielles

Exemple 1.5.5.
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-1)} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+1)$$

1.6. Intégrales impropres

6.1 Intégrales de fonctions non bornées

La définition de $\int_a^b f$ prend pour acquis que f soit bornée sur $[a,b]$. Il arrive parfois que f est bornée sur $[a+\varepsilon, b]$ pour chaque $\varepsilon > 0$, mais pas sur $[a,b]$ lui-même. Dans ce cas, on peut considérer $\int_{a+\varepsilon}^b f$ si elle existe et si

$$\int_{a+\varepsilon}^b f \to \ell \qquad \text{lorsque } \varepsilon \to 0^+,$$

alors on dit que l'intégrale est impropre $\int_a^b f$ converge et on écrit

$$\int_a^b f = \ell.$$

(De même, si la singularité est en b, alors on considère $\int_a^{b-\varepsilon} f$ lorsque $\varepsilon \to 0$.)

Exemple 1.6.1. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[0,1)$ avec $\alpha > 0$.
On a

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha})$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{si } 0<\alpha<1, \\ \infty, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 1$, on a

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log(1) - \log(\varepsilon) \to \infty \quad (\varepsilon \to 0^+).$$

Conclusion : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge si $0 < \alpha < 1$ et vaut $\frac{1}{1-\alpha}$, et diverge si $\alpha \geq 1$.

Remarque. Si une fonction f est définie sur $[a,b) \cup (b,c]$, il se peut que la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^c f \right)$$

existe même si les intégrales impropres $\int_a^b f$ ou $\int_b^c f$ divergent. Dans ce cas, on écrit

$$\text{v.p.} \int_a^c f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^c f \right).$$

On appelle v.p. $\int_a^c f$ la *valeur principale* de $\int_a^c f$.

****

Exemple 1.6.2. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ sur $[0,3]$.

D'abord, on voit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log(|-\varepsilon|) - \log(|-1|) = -\infty,$$

donc l'intégrale impropre diverge. Essayons de calculer la valeur principale. On a

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} \right) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log(|-\varepsilon|) - \log(|-1|) \\ &\qquad + \log(2) - \log(|\varepsilon|) \\ &= \log 2.\end{aligned}$$

6.2 Intégrales sur des intervalles semi-infinis

On suppose que $\int_a^x f$ existe pour tout $x \geq a$. Si

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^x f = \ell,$$

alors on dit que l'intégrale impropre $\int_a^\infty f$ converge et on écrit

$$\int_a^\infty f = \ell.$$

(De même pour $\int_{-\infty}^a f$ en considérant $\int_x^a f$ lorsque $x \to \infty$.)

Exemple 1.6.3. $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, \infty)$ pour $\alpha > 0$.

On a

$$\int_1^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} y^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow{y \to \infty} \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1}, & \text{si } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{si } 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

et si $\alpha = 1$, on a

$$\int_1^y \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log y - \log 1 \to \infty \qquad y \to \infty.$$

Exemple 1.6.4. Soit $f(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$ sur $[1, \infty]$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x. Pour tout $n > 1$ entier, on a

$$\int_1^n f = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \to \infty$$

lorsque $n \to \infty$. Donc l'intégrale $\int_1^\infty f$ diverge.

6.3 Intégrales sur tout l'axe réel

Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que $\int_{-\infty}^\infty f$ converge si les deux intégrales $\int_0^\infty f$ et $\int_{-\infty}^0 f$ convergent toutes les deux. Dans ce cas, on écrit

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f.$$

Remarques. 1. Au lieu de faire la séparation en 0, on peut la faire en tout point $a \in \mathbb{R}$. Cela ne change ni la convergence, ni la valeur.

2. Il se peut la limite

$$\lim_{y \to \infty} \int_{-y}^y f$$

existe même si $\int_{-\infty}^\infty f$ diverge. Dans ce cas, on écrit

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^\infty f = \lim_{y \to \infty} \int_{-y}^y f.$$

On appelle v.p. $\int_{-\infty}^\infty f$ la *valeur principale* de $\int_{-\infty}^\infty f$.

****

Exemple 1.6.5. $f(x) = x$

On voit d'abord que

$$\int_0^y x\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}y^2$$

qui diverge lorsque $y \to \infty$. Donc $\int_0^\infty x\mathrm{d}x$ diverge, ainsi que $\int_{-\infty}^\infty x\mathrm{d}x$. Cependant,

$$\int_{-y}^y x\mathrm{d}x = 0$$

pour tout y, donc v.p. $\int_{-\infty}^\infty x\mathrm{d}x = 0$.

6.4 Tests de convergence pour les intégrales impropres

On considère l'exemple suivant : est-ce que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

converge?

Cette fois-ci, c'est moins évident que dans les exemples précédents, puisqu'on ne sais pas évaluer

$$\int_0^y \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Tout comme pour les séries infinies, il nous faut des tests de convergence. En voici deux.

1. Le test de comparaison

Soit $f, g\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Supposons que

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

pour tout $x \geq a$. Si $\int_a^\infty g$ converge, alors $\int_a^\infty f$ converge aussi. (Donc si $\int_a^\infty f$ diverge, alors $\int_a^\infty g$ diverge aussi.)

*Démonstration***.** On pose $F(x) = \int_a^x f$. On a que

- F est croissante (si $y \geq x$, alors $F(y) - F(x) = \int_x^y f \geq 0$).
- $F(x)$ est majorée (en effet, $F(x) = \int_a^x f \leq \int_a^x g \leq \int_a^\infty g$).

Il s'ensuit que $F(x)$ converge vers une limite (finie) lirsque $x \to \infty$.

□

Exemple 1.6.6. Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, \infty)$. On a $0 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Par le test de comparaison, on a que $\int_1^\infty f$ diverge. En effet, on voit que

$$0 < \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1} < \frac{1}{x} = f(x)$$

et on sait que

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\lfloor x \rfloor + 1}$$

diverge, par l'exemple 1.6.4.

2. La convergence absolue implique la convergence

Soit $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\int_a^\infty |f|$ converge, alors $\int_a^\infty f$ converge aussi.

Démonstration. On remarque que si $\int_a^\infty |f|$ converge, alors $\int_a^\infty 2|f|$ converge. De plus, on a

$$0 \leq f + |f| \leq 2|f|$$

partout. Donc, par le test de comparaison, il suit que

$$\int_a^\infty (f + |f|)$$

converge. Enfin, on a

$$\int_a^x f = \int_a^x (f+|f|) - \int_a^x |f| \longrightarrow \int_a^\infty (f+|f|) - \int_a^\infty |f| \qquad \text{lorsque } x \to \infty.$$

□

On revient maintenant à l'exemple

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

On note que

$$\left| \frac{\cos x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

et on sait que $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.

Par le test de comparaison, on conclut que

$$\int_1^\infty \left| \frac{\cos x}{1+x^2} \right| \mathrm{d}x$$

converge. Comme la convergence absolue implique la convergence, il suit que

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

converge également.

Enfin, on a

$$\int_0^y \frac{\cos x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^2} \mathrm{d}x + \int_1^y \frac{\cos x}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

$$\longrightarrow \int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^2} \mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

Remarque. Montrer la convergence de $\int_a^\infty f$ et trouver sa valeur sont deux problème différents. En général, le deuxième est plus difficile. En fait, on peut montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2e}$$

par des techniques de l'analyse complexe.

****

Les intégrales complexes peuvent parfois être évalué à l'aide de leurs *résidus*. Le prochain calcul n'a aucun lien avec la matière du cours. On pose

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2},$$

une fonction de la variable complexe $z = x + iy$. Lorsque $y = 0$, on trouve

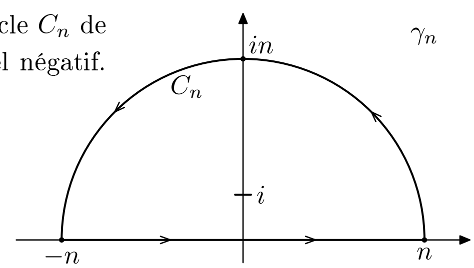
$$f(x) = \frac{e^{ix}}{1+x^2} = \frac{\cos x}{1+x^2} + \frac{i \sin x}{1+x^2}.$$

Cette fonction possède un résidu en $z = i$ et $z = -i$. On s'intéresse seulement à celui en i, puisqu'on intégrera seulement autour de ce résidu. Dans notre cas, le résidu se calcule par

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Soit γ_n le lacet composé de l'intervalle $[-n, n]$ et du demi-cercle C_n de rayon n, centré en 0 partant de l'axe réel positif jusqu'à l'axe réel négatif. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, on pose

$$I_n = \int_{\gamma_n} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \mathrm{d}z.$$



Contour d'intégration γ_n.

Par le théorème des résidus, on a l'équation

$$I_n = 2i\pi \, \mathrm{Res}(f, i) = \frac{2i\pi}{2ie} = \frac{\pi}{e}.$$

Ensuite, l'intégrale sur le demi-cercle s'approche de 0 lorsque $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_n} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \mathrm{d}z \right| &\leq \int_{C_n} \frac{|e^{iz}|}{|1+z^2|} |\mathrm{d}z| \\
&\leq \int_{C_n} \frac{|e^{iz}|}{|z|^2 - 1} |\mathrm{d}z| \\
&= \int_{C_n} \frac{e^{-y}}{n^2 - 1} |\mathrm{d}z| \\
&= \int_0^\pi \frac{n e^{-n \sin\theta}}{n^2 - 1} \mathrm{d}\theta \\
&\leq \frac{n}{n^2 - 1} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \qquad \text{(car } e^{-n\sin\theta} \leq 1\text{)} \\
&\longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathrm{d}z| &= |\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y| \\
&= |-n\cos\theta \, \mathrm{d}\theta + in \sin\theta \, \mathrm{d}\theta| \\
&= \sqrt{n^2 \cos^2\theta + n^2 \sin^2\theta} \, \mathrm{d}\theta \\
&= n \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

On peut maintenant conclure

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{e} &= \lim_{n \to \infty} I_n \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_{\gamma_n} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-n}^{n} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \mathrm{d}z + \int_{C_n} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \mathrm{d}z \right) && \text{(car } \gamma_n \text{ est composé} \\
& && \text{de } C_n \text{ et de } [-n,n]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \mathrm{d}z + 0 && \text{(car } \textstyle\int_{C_n} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \mathrm{d}z \to 0) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{e^{ix}}{1+x^2} \mathrm{d}x && \text{(car } y = 0 \text{ sur } [-n,n]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{\cos x + i \sin x}{1+x^2} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Puisque $\frac{\cos x}{1+x^2}$ est paire et que $\frac{\sin x}{1+x^2}$ est impaire, on a

$$\frac{\pi}{e} = \lim_{n\to\infty} 2 \int_{0}^{n} \frac{\cos x}{1+x^2} \mathrm{d}x + 0.$$

On conclut que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2e}.$$

6.5 Le test de l'intégrale pour les séries

La série $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ converge-t-elle? Les tests vu en analyse 1 échouent sur cet exemple. L'intégrale fournit un test plus raffiné.

Test de l'intégrale *Soit $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction (continue) positive et décroissante. Alors*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \textit{ converge} \Leftrightarrow \int_1^\infty f(x) \mathrm{d}x \textit{ converge.}$$

Démonstration. Pour $x \in [k-1, k]$, on a $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$ et donc

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x) \mathrm{d}x \leq f(k-1).$$

Additionner ces inégalités pour $k = 2, 3, \ldots, n$ donne

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x) \mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k).$$

De l'inégalité de gauche, on obtient que

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \text{ diverge} \Rightarrow \int_1^\infty f(x) \mathrm{d}x \text{ diverge.}$$

De l'inégalité de droite, on trouve

$$\int_1^\infty f(x) \mathrm{d}x \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} f(k) \text{ diverge.}$$

□

Exemple 1.6.7. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ (positive et décroissante si $\alpha > 0$).

On a vu que $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Par le test de l'intégrale, il suit que

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Exemple 1.6.8. $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\beta}\mathrm{d}x$ sur $[2,\infty)$ (positive et décroissante si $\beta > 0$).

On a

$$\int_2^y \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^\beta} = \int_{\log 2}^{\log y} \frac{\mathrm{d}u}{x^\beta} \qquad \begin{aligned} u &= \log x \\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \text{ limite} \Leftrightarrow \beta > 1.$$

Par le test de l'intégrale, il suit que

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k(\log k)^\beta} \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > 1.$$

En particulier, $\sum\limits_{k=2}^\infty x \log x$ diverge.

Exemple 1.6.9. $f(x) = \sin^2(\pi x)$.

On voit que $\int_0^\infty \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$ diverge, mais

$$\sum_{k=1}^\infty \sin^2(\pi k) = \sum_{k=1}^\infty 0$$

converge.

Le test de l'intégrale ne s'applique pas, puisque f n'est pas décroissante.

1.7. Sommes de Riemann et sommes de Darboux

Les sommes $S(f,P)$ et $I(f,P)$ sont appelés *sommes de Darboux*. On présente brièvement le point de vue équivalent de Riemann.

Définition 1.7.1. 1. Soit $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a,b]$. On appelle le tuple $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ un *test* si $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit la *somme de Riemann* $R(f,P,\xi)$ par

$$R(f,P,\xi) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

3. La *largeur* d'une partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ est

$$\|P\| = \max_{1 \le j \le n} (x_j - x_{j-1}).$$

****

Le point 1 de la définition n'est pas standard dans la littérature. On introduit la terminologie d'un test seulement pour alléger le texte.

Remarque. On voit que

$$I(f, P) \le R(f, P, \xi) \le S(f, P) \tag{1}$$

pour tout test ξ.

****

Les sommes de Darboux sont plus faciles à utiliser pour la théorie. Pour le calcul numérique, les sommes de Riemann sont probablement plus utiles. De toute façon, une intégrale sera habituellement approximer par une méthode numérique telle la méthode de Simpson.

Théorème d'équivalence des sommes de Darboux et de Riemann 1.7.2. *Soit une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée. Alors f est intégrable si et seulement si f satisfait au critère de Riemann : il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|P\| < \delta$, alors*

$$|R(f, P, \xi) - S| < \varepsilon$$

pour tout test ξ. Dans ce cas, on a $S = \int_a^b f$.

Avant de faire la démonstration, on démontre une propriété des sommes de Darboux.

Lemme 1.7.3. *Si f est intégrable, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition P, on ait*

$$\text{si } \|P\| < \delta, \text{ alors } S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon. \tag{2}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $P_\varepsilon = \{y_0, \ldots, y_d\}$ telle que

$$S(f, P) - I(f, P) < \tfrac{\varepsilon}{d}.$$

Soit $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ une partition telle que $\|P\| < \delta$, où δ sera déterminé plus tard. Pour $0 \le j \le d$, on définit $\{z_\ell^j\}_\ell$ de sorte que

$$P \cup \{y_0, \ldots, y_j\} = \{z_0^j, \ldots, z_{n+j}^j\}$$

et on pose

$$M_\ell^j = \sup_{[z_{\ell-1}^j, z_\ell^j]} f \qquad \text{et} \qquad M = \sup_{[a,b]} f.$$

La suite est un peu technique, donc allons-y avec soin. Il existe k tel que $y_{j+1} \in [z_{k-1}^j, z_k^j]$. Il s'ensuit que

- pour $\ell < k$, on a $z_\ell^{j+1} = z_\ell^j$;
- pour $\ell = k$, on a $z_k^{j+1} = y_{j+1}$;

- pour $\ell > k$, on a $z_\ell^{j+1} = z_{\ell-1}^j$.

On compare maintenant les sommes supérieures avec $P \cup \{y_0, \ldots, y_j\}$ et $P \cup \{y_0, \ldots, y_{j+1}\}$. On a

$$\begin{aligned}
S(f,&P \cup \{y_0, \ldots, y_j\}) \\
&- S(f, P \cup \{y_0, \ldots, y_{j+1}\}) = \sum_{\ell=1}^{n+j} M_\ell^j (z_\ell^j - z_{\ell-1}^j) - \sum_{\ell=1}^{n+j+1} M_\ell^{j+1}(z_\ell^{j+1} - z_{\ell-1}^{j+1}) \\
&\qquad = \sum_{\ell=k}^{n+j} M_\ell^j (z_\ell^j - z_{\ell-1}^j) - \sum_{\ell=k}^{n+j+1} M_\ell^{j+1}(z_\ell^{j+1} - z_{\ell-1}^{j+1}) \\
&\qquad = M_k^j(z_k^j - z_{k-1}^j) - M_k^{j+1}(y_{j+1} - z_{k-1}^j) - M_{k+1}^{j+1}(z_k^j - y_{j+1}) \\
&\qquad \leq M(z_k^j - z_{k-1}^j) \\
&\qquad \leq M\delta.
\end{aligned}$$

De même, on a

$$I(f, P \cup \{y_0, \ldots, y_{j+1}\}) - I(f, P \cup \{y_0, \ldots, y_j\}) \leq m\delta.$$

En combinant les sommes inférieures et supérieures et prenant la somme de 1 à d, on trouve

$$\begin{aligned}
&S(f, P) - I(f, P) - S(f, P \cup \{y_0\}) + I(f, P \cup \{y_0\}) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{d-1} \Big[S(f, P \cup \{y_0, \ldots, y_j\}) - I(f, P \cup \{y_0, \ldots, y_j\}) \\
&\qquad - S(f, P \cup \{y_0, \ldots, y_{j+1}\}) + I(f, P \cup \{y_0, \ldots, y_{j+1}\}) \Big] \\
&\qquad\qquad = S(f, P) - I(f, P) - \big(S(f, P \cup P_\varepsilon) - I(f, P \cup P_\varepsilon)\big) \\
&\qquad\qquad \leq 2M\delta d.
\end{aligned}$$

Autrement dit, on a

$$\begin{aligned}
S(f, P) - I(f, P) &\leq 2Md\delta + \big(S(f, P \cup P_\varepsilon) - I(f, P \cup P_\varepsilon)\big) \\
&\leq 2Md\delta + \tfrac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Si on prend $\delta = \frac{\varepsilon}{2d}$, alors on obtient

$$S(f, P) - I(f, P) \leq \varepsilon$$

tel que voulu.

On notera bien que le δ choisi dépend de ε et de d, mais pas de P. En effet, d est déterminé en fonction ε et indépendemment de P.

□

Démonstration du théorème. On suppose que f est intégrable et on montre qu'elle satisfait le critère de Riemann.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ dont l'existence provient du lemme 1.7.3. Pour toute partition P avec $\|P\| < \delta$ et pout tout test ξ, on a

$$\begin{aligned}
-\varepsilon &\leq I(f,P) - S(f,P) && \text{(par le lemme 1.7.3)} \\
&\leq R(f,P,\xi) - S(f,P) && \text{(par (1))} \\
&\leq R(f,P,\xi) - \int_a^b f && \left(\text{car } S(f,P) \geq \textstyle\int_a^b f\right) \\
&\leq S(f,P) - \int_a^b f && \text{(par (1))} \\
&\leq S(f,P) - I(f,P) && \left(\text{car } I(f,P) \leq \textstyle\int_a^b f\right) \\
&\leq \varepsilon, && \text{(par le lemme 1.7.3)}
\end{aligned}$$

d'où $\left|R(f,P,\xi) - \int_a^b f\right| \leq \varepsilon$. On conclut que f satisfait au critère de Riemann.

Pour la réciproque, on suppose que f satisfait au critère de Riemann et on montre que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit S et δ qui satisfont au critère de Riemann. D'abord, on a que pour toute partition P avec $\|P\| < \delta$ et pour tout test ξ,

$$R(f,P,\xi) \leq S + \varepsilon.$$

Puisque l'inégalité tient pour tout test $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, elle reste vraie lorsque $f(\xi_j) \to \sup_{[x_{j-1},x_j]} f$. Il suit que $S(f,P) \leq S + \varepsilon$. De même, on a $S - \varepsilon \leq I(f,P)$.

Soit ensuite (P_n) une suite de partitions telle que

$$I(f,P_n) \to \underline{\int_a^b} f \qquad \text{et} \qquad S(f,P_n) \to \overline{\int_a^b} f.$$

On a

$$S - \varepsilon \leq I(f, P \cup P_n) \leq S(f, P \cup P_n) \leq S + \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on conclut que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = S$.

$\square$

Chapitre 2

Convergence uniforme

La notion de *suite* était très importante en analyse 1. On étend cette notion aux fonctions. Comme on le verra, une notion de convergence pour les fonctions est plus difficile à établir.

2.1. Convergence simple

Définition 2.1.1. Soit X un ensemble, soit $(f_n)_{n\geq 1}\colon X \to \mathbb{R}$ des fonctions et soit $f\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement vers f sur X* si, pour chaque $x \in X$, la suite de nombres $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers $f(x) \in \mathbb{R}$.

On écrit également $f_n \to f$ simplement sur X lorsque $n \to \infty$.

****

Exemple 2.1.2. $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{n^2+x^2}$.

On a

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1+\frac{x^2}{n^2}} \to x^2 \quad \text{lorsque } x \to \infty.$$

Conclusion : $f_n \to f$ simplement sur $\mathbb{R}$, où $f(x) = x^2$.

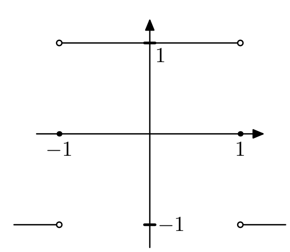
Exemple 2.1.3. $f_n(x) = \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

Il y a trois possibilités :

1. si $|x| < 1$, alors $\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} \to \dfrac{1-0}{1+0} = 1$ lorsque $n \to \infty$;
2. si $|x| > 1$, alors $\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \dfrac{\frac{1}{x^{2n}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1} \to \dfrac{0-1}{0+1} = -1$ lorsque $n \to \infty$;
3. si $|x| = 1$, alors $\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = 0$ pour tout n.

Conclusion : $f_n \to f$ simplement sur $\mathbb{R}$, où

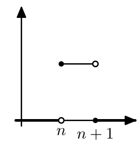
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si } |x| = 1, \\ -1, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$



Remarque. Bien que chaque f_n soit continue, f est discontinue en $x = \pm 1$.

****

Exemple 2.1.4. $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [n, n+1), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

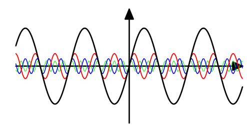


On voit que $f_n(x) = 0$ si $n > x$, donc $f_n \to 0$ simplement sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Ici, $f_n \to 0$ sur $\mathbb{R}$, mais $\int_0^\infty f_n \to \int_0^\infty 0$, car $\int_0^\infty f_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

****

Exemple 2.1.5. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.



On note que $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f_n \to 0$ simplement sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Dans cet exemple, on voit que $f_n \to 0$ simplement sur $\mathbb{R}$, mais $f_n' \to 0'$ simplement sur $\mathbb{R}$. En effet, on a

$$f_n'(0) = \cos(n0) = 1$$

pour tout n, tandis que $0' = 0$.

****

Les exemples 2.1.3 à 2.1.5 montrer que bien qu'elle semble naturelle, la convergence simple ne respecte ni la continuité, ni l'intégration, ni la dérivation. Il nous faut un mode de convergence plus forte : la *convergence uniforme*.

2.2. Convergence uniforme

Définition 2.2.1. Soit X un enesmble. Soit $(f_n)_{n\geq 1} \colon X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions et soit $f \colon X \to \mathbb{R}$ une autre fonction. On dit que f_n *converge vers f uniformément sur X* si

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

lorque $n \to \infty$.

****

Remarque. Si $f_n \to f$ uniformément sur X, alors $f_n \to f$ simplement sur X. Ainsi, pour déterminer si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément :

1. on identifie la limite simple f, si elle existe;
2. on tente de montrer que $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

****

Exemple 2.2.2. $f_n(x) = xe^{-nx}$ sur $[0, \infty)$.

On note que $f_n \to 0$ simplement sur $[0, \infty)$. On veut donc montrer que

$$\sup_{x \in [0,\infty)} |xe^{-nx}| \to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

On a

$$f_n'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = (1 - nx)e^{-nx} \begin{cases} > 0, & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ < 0, & \text{si } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

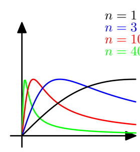
Donc, il s'ensuit que

$$\sup_{x \in [0,\infty)} |f_n(x)| = f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne} \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

Conclusion : $f_n \to 0$ uniformément sur $[0, \infty)$.

Exemple 2.2.3. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ sur $[0, 1]$



On voit que $f_n \to 0$ simplement sur $[0, 1]$. (En effet, si $x > 0$, alors $f_n(x) \leq \frac{nx}{n^2x} = \frac{1}{nx}$ et si $x = 0$, alors $f(0) = 0$ pour tout n.)

On trouve que le supremum est atteint en $x = \frac{1}{n}$ (à l'aide du calcul différentiel). Donc

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{2} \not\to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

Conclusion : $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ (ni vers 0, ni vers aucune autre limite).

Exemple 2.2.4. $f_n(x) = x^n$ sur $(0, \frac{9}{10})$.

On voit que $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $x \in (0, \frac{9}{10})$. De plus, on a

$$\sup_{x \in (0, \frac{9}{10})} |f_n(x)| = \left(\frac{9}{10}\right)^n \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Donc $x^n \to 0$ uniformément sur $(0, \frac{9}{10})$.

Exemple 2.2.5. $f_n(x) = x^n$ sur $(0, 1)$.

Encore une fois, on voit que $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $x \in (0, 1)$. Par contre, on a

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x)| = 1^n \not\to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Ainsi, f_n ne converge pas uniformément sur $(0, 1)$.

Morale : le domaine est important!

2.3. Convergence uniforme et continuité

Théorème 2.3.1. *On suppose que $f_n \to f$ uniformément sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Si chaque f_n est continue en a, alors f est continue en a.*

Corollaire 2.3.2. *Si $f_n \to f$ uniformément sur I et si chaque f_n est continue sur I, alors f est continue sur I aussi.*

Démonstration du théorème. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f_n \to f$ uniformément sur I, il existe N tel que

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En particulier,

$$\sup_{x \in I} |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{$*$}$$

Comme f_N est continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta$, on a

$$|f_N(x) - f_N(a)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \tag{$**$}$$

Ainsi, pour tout $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &< \underset{\text{par } (*)}{\tfrac{\varepsilon}{3}} + \underset{\text{par } (**)}{\tfrac{\varepsilon}{3}} + \underset{\text{par } (*)}{\tfrac{\varepsilon}{3}} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où f est continue en a.

$\square$

Exemple 2.3.3. $f_n(x) = \dfrac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$.

On a déjà vu que $f_n \to f$ simplement, où

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si } |x| = 1, \\ -1, & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

qui a des discontinuités en $x = \pm 1$. Donc $f_n \not\to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.3.4. $f_n(x) = x^n$ sur $(0, 1)$.

On a vu que $f_n \to 0$ simplement, mais pas uniformément sur $(0, 1)$. Bien que la convergence ne soit pas uniforme, la limite simple est continue. Cela montre que la convergence uniforme est *suffisante* pour préserver la continuité, mais pas nécessaire.

2.4. Convergence uniforme et intégration

Théorème 2.4.1. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné $[a,b]$ et on suppose de plus que $f_n \to f$ uniformément sur $[a,b]$. Alors*

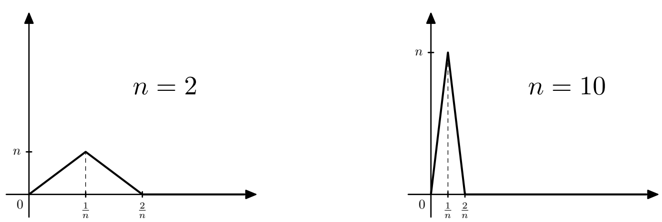
$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

Démonstration. D'après le théorème de la section 2.3, la fonction f est continue sur $[a,b]$, donc intégrable. On a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| &= \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \\
&\leq \int_a^b |f_n - f| \\
&\leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \\
&\longrightarrow 0 \qquad\qquad \text{lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 2.4.2. f_n la fonction de la figure.



On a que $f_n \to 0$ simplement sur $[0,2]$, mais $\int_0^2 f_n \not\to \int_0^2 f$, puisque $\int_0^2 f_n = 1$ pour tout et $\int_0^2 0 = 0$.

Conclusion : la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

Exemple 2.4.3. f_n la fonction de la figure

On a que $f_n \to 0$ uniformément sur $[0,\infty)$ (en effet $\sup_{[0,\infty)} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$).

Par contre, on voit que $\int_0^\infty f_n \not\to \int_0^\infty 0$, puisque $\int_0^\infty f_n = 1$ pour tout n et $\int_0^\infty 0 = 0$. Le théorème de n'applique pas, puisque $[0, \infty)$ n'est pas borné.

2.5. Convergence uniforme et dérivation

Attention! Même si $f_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$, on n'obtient pas $f_n' \to f'$ (même simplement).

Exemple 2.5.1. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.

On a que $f_n \to 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$, puisque

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| = \frac{1}{n} \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$, mais $f_n'(x) = \cos(nx)$, donc $f'(0) = 1 \neq 0$.

Conclusion : $f_n' \not\to 0$ en $x = 0$.

Théorème 2.5.2. *Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle I. On suppose que chaque f_n est dérivable et que f_n' est continue. On suppose, de plus, que*
(i) $f_n \to f$ simplement sur I;
(ii) $f_n' \to g$ uniformément sur I. Alors f est dérivable sur I et $f' = g$.

Autrement dit, sous ces hypothèses, on a

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} (f_n)'.$$

Démonstration. On fixe $a \in I$. Par le théorème fondamental du calcul, version 2, pour chaque $x \in I$, on a

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'. \tag{$*$}$$

D'une part, par l'hypothèse (i), on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_n(a) = f(x) - f(a)$$

pour chaque $x \in I$.

D'autre part, par l'hypothèse (ii) et le théorème de la section 2.4, on a

$$lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n' = \int_a^x g.$$

Donc, en laissant $n \to \infty$ dans $(*)$, on obtient

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g.$$

Par le théorème fondamental du calcul, version 1, f est dérivable et

$$f'(x) = g(x)$$

pour tout $x \in I$.

□

2.6. Convergence uniforme des séries

Tout comme pour les séries de nombres, la convergence d'une série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ est définie en termes de la convergence de la suite des sommes partielles

$$f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

Définition 2.6.1. Soit X un ensemble et soit $(u_k)_{k\geq 0}\colon X \to \mathbb{R}$ des fonctions. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

On dit que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ *converge simplement* sur X si la suite (f_n) converge simplement sur X. On dit que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ *converge uniformément* sur X si la suite (f_n) converge uniformément sur X.

****

Les théorèmes déjà vus pour les suites se traduisent facilement en des théorèmes correspondants pour les séries.

Théorème de continuité 2.6.2. *Si $(u_k)_{k\geq 0}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle I et si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformément sur I, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est continue sur I.*

Théorème d'intégration 2.6.3. *Si $(u_k)_{k\geq 0}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle borné $[a,b]$ et si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b u_k \right).$$

Démonstration. On pose $f_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a

$$\int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k.$$

Par hypothèse, $f_n \to \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ uniformément sur $[a,b]$, donc par le théorème de la section 2.4, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} u_k,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

□

Théorème de dérivation 2.6.4. *Soit* $(u_k)_{k\geq 0}$ *une suite de fonctions dérivables sur un intervalle* I *avec* u_k' *continue pour chaque* k. *On suppose, de plus, que*

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *converge simplement sur* I, *et*

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} u_k'$ *converge uniformément sur* I.

Alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *est dérivable sur* I *et*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k)'.$$

Démonstration. On pose $f_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$. On sait que f_n est dérivable et que

$$f_n' = \sum_{k=0}^{n} (u_k)'$$

Par l'hypothèse (i), on a que

$$f_n \to \sum_{k=0}^{\infty} u_k \qquad (n \to \infty)$$

sur I et

$$f_n' \to \sum_{k=0}^{\infty} u_k' \qquad (n \to \infty)$$

uniformément sur I.

Selon le théorème de la section 2.5, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est dérivable sur I et

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} u_k'.$$

□

En principe, la théorie pour les séries est pareille à celle des suites. Cependant, en pratique, il y a une différence importante. Il est souvent difficile, voire impossible, d'identifier explicitement la limite $f(x)$ d'une série, ce qui complique le calcul de $\sup|f(x) - f_n(x)|$ utilisé pour déterminer la convergence uniforme de la série. Il nous faut donc un critère qui nous assure de la convergence uniforme d'une série de fonctions, sans avoir à identifier explicitement la limite. Voici un tel critère.

Le critère de Weierstrass. *Soit* $(u_k)_{k\geq 0}$ *une suite de fonction sur* X. *On suppose qu'il existe des nombres* $(M_k)_{k\geq 0}$ *tels que*

(i) $|u_k(x)| \leq M_k$ *pour tout* $k \geq 0$ *et* $x \in X$, *et*

(ii) la séries $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ *converge.*

Alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *converge uniformément sur* X.

Exemple 2.6.5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$.

On note que

$$\left|\frac{\sin(kx)}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$$

et que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

D'après le critère de Weierstrass, la séries $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.6.6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(1000^k x)}{10^k}$.

Exactement le même raisonnement montre que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$, donc elle donne une fonction continue. (Par contre, on peut montrer que cette fonction n'est dérivable nulle part.)

Démonstration. On remarque d'abord que la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge simplement sur X. En effet, pour chaque $x \in X$, on a $|u_k(x)| \leq M_k$ et $\sum_{0}^{\infty} M_k$ converge, donc par le test de comparaison pour les séries, $\sum_{0}^{\infty} |u_k(x)|$ converge.

Le problème est de montrer que la convergence est uniforme sur X. Pour le faire, on considère les sommes partielles

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et on pose aussi

$$f := \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

On sait que $f_n \to f$ simplement sur X et on veut montrer que $f_n \to f$ uniformément sur X.

On prend n, m entiers avec $m > n$. Pour chaque $x \in X$, on a

$$f_m(x) - f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x),$$

donc

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k.$$

On laisse $m \to \infty$ pour obtenir

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Comme cet estimé est valable pour chaque $x \in X$ et le membre de droite ne dépend pas de x, il suit que

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Or on a

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = \sum_{k=0}^{\infty} M_k - \sum_{k=0}^{\infty} \longrightarrow 0$$

lorsque $n \to \infty$. On conlut que

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| = 0.$$

Conclusion : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformément sur X.

□

2.7. Espaces des fonctions continues

Cette section est optionnelle, donc elle peut être considérer comme ayant le sinus du topologue partout. Son contenu n'est pas trop difficile pour le cours, mais il sort un peu du cadre.

L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est

$$C^0(I) = \{f \colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est continue et bornée}\}.$$

L'hypothèse que f est bornée n'est pas toujours présente parmi les auteurs. Pour cette section, on en aura besoin, puisque l'on voudra que $\sup_I |f| < \infty$. Si I est compact, alors f est bornée de toute façon.

On vérifie sans peine que $C^0(I)$ est un espace vectoriel. L'intérêt de la section est d'associer une notion de distance entre deux fonctions continues.

Définition 2.7.1. Soit V un espace vectoriel. Une *norme* sur V est une application $\|\cdot\| \colon V \to [0, \infty)$ telle que

1. (séparation) pour tout $x \in V$, si $\|x\| = 0$, alors $x = 0$;
2. (homogénéité) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in V$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. (sous-additivité) pour tout $x, y \in V$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

****

Le point 3 s'appelle aussi l'inégalité triangulaire. Ces axiomes décrivent la notion de distance entre deux vecteurs.

Exemple 2.7.2. Soit $V = \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. La norme euclidienne est

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}.$$

C'est bien une norme et c'est celle qui est habituellement utilisé dans $\mathbb{R}^n$. Par exemple, pour $n = 2$ et $x = (a, b)$, on a

$$\|x\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Il y a d'autres normes possibles. Par exemple

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

ou

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Voici le lien avec les fonctions continues.

Proposition 2.7.3. *Soit $X \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble et $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Alors*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} f(x)|$;*
2. $\sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)|$.

Démonstration. 1. On pose $S = \sup_{x \in X} |f(x)|$ et $L = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)|$. Puisqu'on a

$$f(x) \leq S$$

pour tout $x \in X$, il suit que

$$|\lambda| f(x) \leq |\lambda| S$$

pour tout $x \in X$. Ainsi $|\lambda| S$ est un majorant de λf. On en conclut que $L \leq |\lambda| S$.

Ensuite, si $L < |\lambda| S$, alors on a

$$\frac{1}{|\lambda|} L < S,$$

donc il existe x tel que

$$\frac{1}{|\lambda|} L < f(x) \leq S.$$

Ceci est une contradiction, car $|\lambda| f(x) \leq L$ pour tout $x \in X$. Ainsi $L \geq |\lambda| S$.

Conclusion : $L = |\lambda| S$, comme voulu.

2. Ceci découle simplement du fait que $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$.

$\square$

La proposition nous dit que $\sup_X |f|$ définie une norme. Ainsi, pour $f \in C^0(I)$, on pose

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in I} |f(x)| = \sup_I |f|$$

et on l'appelle la *norme infinie*. On dit que $(C^0(I), \|\cdot\|_\infty)$ est un *espace vectoriel normé*. On interprète donc $\|f\|_\infty$ comme la longueur de f (dans le sens de la longueur d'un vecteur) et $\|f-g\|_\infty$ est la distance entre f et g.

Définition 2.7.4. Une *suite de Cauchy* dans un espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$ est une suite (x_n) dans V telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on a

$$\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon.$$

****

On sait que les suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$ convergent. Est-ce toujours le cas dans les autres espaces vectoriels normés? Avant de répondre à cette question, on montre deux propriétés qui sont toujours vraies pour les suites de Cauchy.

Proposition 2.7.5. *Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.*

1. *Si (x_n) est une suite de V convergente, alors c'est une suite de Cauchy.*
2. *Si (x_n) est une suite de Cauchy de V, alors (x_n) est bornée.*

Démonstration. 1. Soit $x \in V$ la limite de (x_n). Soit $\varepsilon > 0$. Puisque x_n converge vers x dans V, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit maintenant $m \geq N$. On a

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On conclut que (x_n) est une suite de Cauchy.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N > 0$ tel que pour tout $m, n \geq N$, on a

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Ainsi, il s'ensuit que pour tout $n \geq N$,

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x_N\| + \|x_N\| < \varepsilon + \|x_N\|.$$

On pose $M = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_{N-1}\|, \|x_n\| + \varepsilon\}$. On a donc $\|x_n\| \leq M$ pour tout n.

$\square$

Théorème 2.7.6. *Les suites de Cauchy de $(C^0(I), \|\cdot\|_\infty)$ convergent dans $C^0(I)$. Autrement dit, si (f_n) est une suite de Cauchy, alors il existe $f \in C^0(I)$ telle que*

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

Démonstration. D'abord, par la proposition 2.7.5, la suite est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\|_\infty \geq M$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $x \in I$, on sait que $\big(f_n(x)\big)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Puisque les suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$ convergent, il existe $f(x)$ telle que $f_n(x) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, $f_n \to f$ simplement sur I.

On doit maintenant montrer que $f \in C^0(I)$ et que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On montre le deuxième point en premier.

Soit $N > 0$ tel que pour tout $n, m \geq N$,

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_\infty < \varepsilon.$$

Cette inégalité se réécrit comme

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

pour tout $x \in I$ et tout $n, m \geq N$. Ainsi, on laisse $m \to \infty$ pour obtenir

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

pour tout $x \in I$ et tout $n \geq N$. On conclut que

$$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty < \varepsilon,$$

donc $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Ceci veut dire que $f_n \to f$ uniformément sur I. Par le théorème 2.3.1, on obtient que f est continue. Puisque la suite (f_n) est de Cauchy, elle est bornée, donc f est bornée. On obtient que $f \in C^0(I)$.

□

Remarque. Lorsque toutes les suites de Cauchy convergent et que leur limite appartient à l'espace, on dit que l'espace est *complet*. Ainsi, le théorème se réécrit

$$(C^0(I), \|\cdot\|_\infty) \text{ est complet.}$$

En général, on aime que les espaces soient complet, car les suites de Cauchy sont centrales en analyse. En allemand, par exemple, on les appelle les suites fondamentales (fundamental folge.)

****

Exemple 2.7.7. On définit sur $C^0([a, b])$ la norme

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|.$$

Cet espace n'est pas complet.

Pour montrer que cet exemple est vrai, on utilise le lemme suivant, qui peut sembler surprenant. (Il m'a personnellement surpris à l'époque.)

Lemme 2.7.8. *Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors V est complet si et seulement si les séries absolument convergentes convergent.*

Remarque. Une série est absolument convergente si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$$

converge dans $\mathbb{R}$. Elle converge si

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{m} a_n \right\| \to 0$$

lorsque $m \to \infty$.

****

Démonstration. On suppose V est complet. Soit $s_n = \sum_{j=0}^{n} x_n$ les sommes partielles d'une série de V. On suppose que la série converge absolument et on montre qu'elle converge.

On suppose que $n > m$. On a

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\| &= \left\| \sum_{j=m}^{n} x_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=m}^{n} \|x_j\|. \end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\|s_m - s\| \leq \sum_{j=m}^{\infty} \|x_j\|.$$

Puisque la série est absolument convergente, il suit que $\|s_m - s\| \to 0$ lorsque $m \to \infty$.

Réciproquement, on suppose que les séries absolument convergentes convergent. Soit (x_n) une suite de Cauchy. On pose

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} (x_{j+1} - x_j).$$

$\square$

On peut maintenant terminer l'exemple.

Exemple 2.7.9. On montre que l'espace $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet. On considère la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

sur $[0,1]$. On voit que la série converge absolument, car

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Or, la série ne converge pas dans $C^0([0,1])$, puisque $f(1) = \infty$.

Chapitre 3

Séries entières

Une série entière est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

où les coefficients a_k sont des nombres réels (complexes). On verra que ces séries possèdes des propriétés spéciales qui les rendent presque aussi faciles à manipuler que les polynômes.

3.1. Rayon de convergence

Théorème 3.1.1. *Soit* $\sum\limits_0^{\infty} a_k x^k$ *une série entière. Alors il existe* R *avec* $0 \leq R \leq \infty$ *tel que*

- $|x| < R \Rightarrow \sum\limits_0^{\infty} a_k x^k$ *et* $\sum\limits_0^{\infty} |a_k x^k|$ *convergent;*
- $|x| > R \Rightarrow \sum\limits_0^{\infty} a_k x^k$ *et* $\sum\limits_0^{\infty} |a_k x^k|$ *divergent.*

Remarques. 1. Le nombre R s'appelle le rayon de convergence.

2. Le théorème ne dit rien sur ce qui se passe lorsque $|x| = R$. Cela dépend de la série en question.
3. Le rayon de convergence est unique, puisque si $R < R_1$ était un autre rayon de convergence, pour les x tels que $R < |x| < R_1$, la série entière devrait à la fois converger et diverger, ce qui est impossible.

****

Démonstration. On pose
$$C = \left\{ x : \sum_0^\infty a_k x^k \right\}.$$
Cet ensemble est non vide, car $0 \in C$. On pose ensuite
$$R = \sup_{x \in C} |x|$$
($R = \infty$ si C est non borné). Par la définition de R, si $|x| > R$, alors $x \notin C$, donc $\sum_0^\infty a_k x^k$ diverge et ainsi $\sum_0^\infty |a_k x^k|$ diverge aussi.

Il reste à montrer que si $|x| < R$, alors $\sum_0^\infty |a_k x^k|$ converge et donc $\sum_0^\infty a_k x^k$ converge aussi. On prend x avec $|x| < R$. Par la définition de R, il existe $y \in C$ tel que $|x| < |y|$. Comme $y \in C$, la série $\sum_0^\infty a_k y^k$ converge. Il suit que
$$\lim_{k \to \infty} a_k y^k = 0$$
et donc que la suite $(a_k y^k)$ est bornée, disons $|a_k y^k| \leq M$ pour tout $k \geq 0$. Alors on a
$$|a_k x^k| = |a_k y^k| \left| \frac{x}{y} \right|^k \leq M \left| \frac{x}{y} \right|^k$$
et
$$\sum_{k=0}^\infty M \left| \frac{x}{y} \right|^k$$
converge puisque c'est une progression géométrique de rapport $\left| \frac{x}{y} \right| < 1$.

Par le test de comparaisons, il suit que $\sum_0^\infty |a_k x^k|$ converge, comme voulu.

□

Exemple 3.1.2. $\sum_{k=0}^\infty x^k$.

Elle converge si $|x| < 1$ et elle diverge si $|x| \geq 1$ (puisque $x^k \not\to 0$ lorsque $k \to \infty$). Donc $R = 1$.

Exemple 3.1.3. $\sum_{k=0}^\infty k x^k$.

On applique le test de d'Alembert :
$$\frac{|(k+1)x^{k+1}|}{|kx^k|} = \left| \frac{k+1}{k} \right| |x| \to |x| \quad (k \to \infty).$$
Donc, la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.

Conclusion : $R = 1$.

Exemple 3.1.4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

On applique d'Alembert :

$$\frac{\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = \frac{|x|}{k} \to 0$$

lorsque $k \to \infty$. Donc la série converge pour tout x, c'est-à-dire que $R = \infty$.

Exemple 3.1.5. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$.

La série diverge si $|x| \neq 0$ et elle converge si $x = 0$, donc $R = 0$.

3.2. Séries entières et convergence uniforme

Théorème 3.2.1. *Soit* $\sum\limits_{0}^{k} a_k x^k$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors, pour chaque* $S < R$, *la série* $\sum\limits_{0}^{k} a_k x^k$ *converge uniformément sur* $[-S, S]$.

Remarque. En général, la convergence n'est pas uniforme sur $(-R, R)$. Par exemple, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{si } |x| < 1$$

et on a vu que $R = 1$. Par contre, on voit que

$$\sup_{x \in (-1,1)} \left| \sum_{k=0}^{n} x^k - \frac{1}{1-x} \right| = \infty$$

pour tout n.

****

Démonstration. On fixe $S < R$. Pour tout $x \in [-S, S]$, on a

$$|a_k x^k| \leq |a_k| S^k$$

et $\sum\limits_{0}^{\infty} |a_k| S^k$ converge (puisque $S < R$).

Par le critère de Weierstrass, appliqué avec $M_k = a_k S^k$, on conclut que $\sum\limits_{0}^{\infty} a_k x^k$ converge uniformément sur $x \in [-S, S]$.

□

Corollaire 3.2.2. *La fonction* $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *est continue sur* $(-R, R)$.

Démonstration. Pour tout $S < R$, la séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge uniformément sur $[-S, S]$, donc f est continue sur $[-S, S]$. Comme c'est vrai pour chaque $S < R$, il s'ensuit que f est continue sur $(-R, R)$.

$\square$

Corollaire 3.2.3. *Soit* $\sum_{0}^{\infty} a_k x^k$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Pour tout* a, b *tel que* $-R < a < b < R$, *on a*

$$\int_a^b \sum_0^{\infty} a_k x^k = \sum_0^{\infty} \int_a^b a_k x^k.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 2.6.3.

$\square$

Exemple 3.2.4. On pose $L(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$. On montre que L se développe en série entière autour de $x = 1$. Si $|x| < 1$, on a

$$\begin{aligned} L(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{\mathrm{d}t}{t} &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \mathrm{d}r && (\text{car } |t| \leq |x| < 1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n \mathrm{d}t && (\text{corollaire 3.2.3}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a pour $|x - 1| < 1$

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}.$$

De plus, on voit que pour $x = 0$, la série diverge, donc le rayon de convergence est exactement 1.

3.3. Dérivation terme à terme des séries entières

Théorème 3.3.1. *Soit* $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors* f *est dérivable sur* $(-R, R)$ *et*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \qquad \text{pour } x \in (-R, R).$$

Lemme 3.3.2. $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ *converge poue tout* x *avec* $|x| < R$ $(R =$ *le rayon de convergence de* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)$.

Démonstration. On fixe x avec $|x| < R$. On choisit $\delta > 0$ tel que $|x| + \delta < R$. Alors $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|(|x| + \delta)^k$ converge. On aussi

$$\begin{aligned}(|x| + \delta)^k &= |x|^k + k|x|^{k-1}\delta + \cdots + \delta^k \\ &\geq k|x^{k-1}\delta \qquad (\forall k \geq 0).\end{aligned}$$

Donc, par le test de comparaison, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|k|x|^{k-1}\delta$$

converge. On voit que $\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k||x|^{k-1}$ converge et ainsi $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ converge.

□

Démonstration du théorème. On pose

$$u_k(x) = a_k x^k, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Par le lemme, le rayon de convergence de la série de g est au moins R. Donc, par le théorème de la section 3.2, pour chaque $S < R$,

$\sum_0^{\infty} u_k$ converge uniformément vers f sur $[-S, S]$ et

$\sum_0^{\infty} u_k'$ converge uniformément vers g sur $[-S, S]$.

Il suit que f est dérivable sur $[-S, S]$ et que $f' = g$ sur $[-S, S]$.

Comme c'est vrai pour chaque $S < R$, en fait f dérivable sur $(-R, R)$ et $f' = g$ sur $(-R, R)$.

□

Exemple 3.3.3. $\sum\limits_0^\infty x^k = \frac{1}{1-x}$ $(|x| < 1)$.

D'après le théorème, on a

$$\sum_{k=1}^\infty kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On peut réappliquer le théorème à la série entière $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^\infty ka_kx^{k-1}$.

Corollaire 3.3.4. *Une série entière* $f(x) = \sum\limits_0^\infty a_kx^k$ *de rayon de convergence* $R > 0$ *est indéfiniment dérivable et pour chaque* $n \geq 0$*, on a*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^\infty k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)a_kx^{k-n} \quad \text{pour } x \in (-R, R). \tag{$*$}$$

Corollaire 3.3.5. *Sous les mêmes hypothèses,*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Démonstration. En posant $x = 0$ dans $(*)$, on obtient $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$.

□

Corollaire 3.3.6. *Si* $\sum\limits_0^\infty a_kx^k = \sum\limits_0^\infty b_kx^k$ *pour* $x \in (-\delta, \delta)$*, où* $\delta > 0$*, alors* $a_k = b_k$ *pour tout* $k \geq 0$.

Démonstration. On pose $f(x) = \sum\limits_0^\infty a_kx^k$ et $g(x) = \sum\limits_0^\infty b_kx^k$. Selon l'hypothèse, $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in (-\delta, \delta)$.

Il s'ensuit que $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ pour tout $x \in (-\delta, \delta)$ et pour tout $n \geq 0$. En particulier, on a $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$. Par le corollaire 3.3.5, on déduit que $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$.

□