2. Trouver la série de Fourier de f :

Si $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -e^{-inx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{in}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{in}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{in} - \frac{(-1)^n}{in} - \frac{(-1)^n}{in} + \frac{1}{in}\right)$$

$$= \frac{1}{in\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

Si $n = 0$:

$$c_0 = \int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} dx$$

$$= [-x]_{-\pi}^{0} + \pi$$

$$= -\pi + \pi = 0$$

On a donc que la série de Fourier de f est :

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(\frac{1}{in\pi}\left(1 - (-1)^n\right)\right) e^{inx}$$

Or, on a que

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} e^{inx}$$

$$= \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} i\left(\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\right)(\cos(nx)+i\sin(nx))$$

$$= \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin(nx) + \underbrace{i\left(\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\right)\cos(nx)}_{=0}$$

$$\left(\text{car } \underbrace{c_n\cos(nx)+c_{-n}\cos(-nx)}_{=0},\quad c_n\sin(nx)+c_{-n}\sin(nx) = 2c_n\sin(nx)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)\sin(nx)}{n\pi}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 2\sin((2n-1)x)}{(2n-1)\pi}$$

$$\left(1-(-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair}\end{cases}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin((2n-1)x)}{(2n-1)\pi}$$

Une preuve analogue à l'exercice 9b) de la série 4 montre que cette série ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$, en prenant

$$x = \frac{\pi}{2N-1}.$$

3) On a donc, avec $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ int. , $C \in \mathbb{R}$:

$$c_n(f+g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f+g) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f e^{-inx} dx + \int_{-\pi}^{\pi} g e^{-inx} dx \right)$$ (Linéarité de l'intégrale)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g e^{-inx} dx$$

$$= c_n(f) + c_n(g)$$

$$c_n(Cf) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C f e^{-inx} dx$$

$$= \frac{C}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f e^{-inx} dx$$ (Linéarité de l'intégrale)

$$= C \, c_n(f)$$

b) On a donc, pour $f = C \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C e^{-inx} dx$$

$$= \frac{C}{2\pi} \left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{c}{-2\pi i n}\left(e^{-in\pi} - e^{in\pi}\right)$$

$$= \frac{c}{-2\pi i n}\left((-1)^n - (-1)^n\right)$$

$$= 0.$$

c) On a que, $\forall n \neq 0$

$$c_n(f) = c_n\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= c_n(x) + c_n\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad \left(a),\ x, \frac{\pi}{4} \text{ int.}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx}\,dx + 0$$

$u = x \quad dv = e^{-inx}dx$
$du = dx \quad v = \frac{e^{-inx}}{-in}$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{x e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{-2\pi i n}\left(\pi(-1)^n + \pi(-1)^n\right) + \frac{1}{2\pi i n}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n}{-in} + \cancel{\frac{1}{2\pi n^2}\left((-1)^n - (-1)^n\right)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{-in}$$

Pour $n=0$, on a

$$c_0\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = c_0(x) + c_0\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad \left(c_0,\ x, \frac{\pi}{4} \text{ int.}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi}{4}\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi}{4}\,(\pi - -\pi) \qquad (x \text{ impaire sur } [-\pi,\pi])$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

La série de Fourier de $f(x) = x + \frac{\pi}{4}$ est

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{(-1)^n}{-in}$$

4. Soit $c \in (0,\pi)$.

Calculons les coefficients, pour $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-c}^{c}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{-in}\left(e^{-inc} - e^{inc}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{2\sinh(inc)}{in}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{2i\sin(nc)}{in} = \frac{\sin(nc)}{\pi n}$$

$$\left(\begin{aligned} &\sinh(ix) = i\sin(x)\\ &\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\\ &\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\end{aligned}\right)$$

Pour $n=0$, on a

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} dx$$

$$= \frac{c}{\pi}$$

La série de Fourier de f est donc

$$\frac{c}{\pi} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} e^{inx}\frac{\sin(nc)}{n\pi}$$

$$= \frac{c}{\pi} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{\sin(nc)}{n\pi}\left(\cos(nx) + i\sin(nx)\right)$$

$$= \frac{c}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(nc)}{n\pi}\cos(nx) \qquad \text{(parité de cos et sin)}$$

b) On remarque que f est régulière par morceaux, on a alors vu en classe que

$$f(x) = \frac{c}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(nc)}{n\pi}\cos(nx)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x\in(-c,c) \\ 0 & \text{si } x\in[-\pi,-c)\cup(c,\pi] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x\in\{-c,c\} \end{cases}$$

On a alors en $x = c$ que

$$\frac{c}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(nc)\cos(nc)}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nc)}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nc)}{n} = \frac{1}{2} - \frac{c}{\pi}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nc)}{n} = \frac{\pi - 2c}{2}$$

$$\left(\begin{aligned} \sin(2x) &= \sin(x+x) \\ &= \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) \\ &= 2\sin(x)\cos(x) \end{aligned}\right)$$

$\square$

a) On a aussi pour $n \neq 0$:

$$c_n\left(\frac{\pi^2 x - x^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3} c_n(x) - \frac{1}{3} c_n(x^3) \quad (3a))$$

$$= \frac{\pi^2}{3} \frac{(-1)^n}{-in} - \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n}{in}\left(\frac{6}{n^2} - \pi^2\right)\right) \quad ((a), 3c))$$

$$= \frac{(-1)^n}{in}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{-2(-1)^n}{in^3}$$

$$= \frac{2i(-1)^n}{n^3}$$

De plus, pour $n=0$, on a aussi

$$c_0\left(\frac{\pi^2 x - x^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3} c_0(x) - \frac{1}{3} c_0(x^3) \quad (3a))$$

$$= 0$$ car x et x^3 sont des fonctions impaires

Donc la série de Fourier de f est

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{2i(-1)^n}{n^3} e^{inx}$$

b) Par l'égalité de Parseval, nous avons que

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left|\frac{2i(-1)^n}{n^3}\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi^2 x - x^3}{3}\right)^2 dx$$

($f : [-\pi, \pi]$ cont. régulière par morceaux et $f(-\pi) = f(\pi)$

$$f(-\pi) = \frac{-\pi^3 + \pi^3}{3} = 0$$

$$f(\pi) = \frac{\pi^3 - \pi^3}{3} = 0)$$

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{4}{n^6} = \frac{1}{18\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi^4 x^2 - 2\pi^2 x^4 + x^6 \, dx$$

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{4}{n^6} = \frac{1}{18\pi}\left[\pi^4 \frac{x^3}{3} - 2\pi^2 \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{18\pi}\left(\frac{\pi^7}{3} - \frac{2\pi^7}{5} + \frac{\pi^7}{7} + \frac{\pi^7}{3} - \frac{2\pi^7}{5} + \frac{\pi^7}{7}\right)$$

$$= \frac{\pi^6}{18}\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7}\right)$$

$$= \frac{8\pi^6}{945}$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{n^6} = \frac{2\pi^6}{945} \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n)^6}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$\square$

6

a) On a, pour $n=0$:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta = \frac{1}{2\pi}\cdot 1 = \frac{1}{2\pi}$$

Pour $n \neq 0$, on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi} e^{-in\cdot 0} = \frac{1}{2\pi}$$

La série de Fourier de f est alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{N\to+\infty} \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{2\pi} e^{inx}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} D_N \qquad (\text{déf } D_N)$$

b) On a vu à l'exercice 8 b) de la série 4 que, pour $x \neq 2k\pi$ pour $k\in\mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2\pi} D_N(x) = \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{2\pi} e^{inx}$$

$$= \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{2\pi} \left(\cos(nx) + i\sin(nx)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{N} 2\cos(nx)\right)$$ (parité de cos et sin, $\cos(0)=1$)

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$ (8b) série 4)

Or, cette limite diverge lorsque $N \to \infty$ (analyse 1)

Si $x = 2\pi k$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2\pi} D_N(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} e^{in(2\pi k)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}(2N+1)$$ ($e^{in2\pi k} = 1 \ \forall k, n \in \mathbb{Z}$)

$$= \frac{N}{\pi} + \frac{1}{2\pi}$$

qui diverge aussi lorsque $N \to \infty$.

Donc la série de Fourier ne converge pas.

c) On a que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f D_N - f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f D_N - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N f(0)$$ $\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N = 1\right)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f - f(0)) D_N$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f - f(0))\left(\sum_{|n| \leq N} e^{inx}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(0)) \sum_{n=0}^{2N} e^{ix(n-N)} \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(0)) \; e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{ixn} \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(0)) \; e^{-iNx} \left(\frac{1 - e^{ix(2N+1)}}{1 - e^{ix}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(f(x) - f(0))}{e^{ix} - 1} \left(e^{i(N+1)x} - e^{-iNx} \right)$$

Posons $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{e^{ix} - 1}$. On remarque que g est une fonction continue pour tout $x \neq 0$, montrons que $\lim_{x \to 0} g(x)$ existe :

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{e^{ix} - 1}$$

$$\overset{R.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{ie^{ix}}$$

$$= -i f'(0)$$

Puisque g est intégrable, on remarque que $(*)$ devient :

$$c_{-N-1}(g) - c_N(g)$$

Par le numéro 2 du devoir 2, on a que $\left(\begin{array}{l} g \text{ cont. sur } [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ \text{et } |g| \text{ int.} \end{array} \right)$

$$\lim_{N \to \infty} c_{-N-1}(g) - c_N(g) = 0.$$